

ARCHI – Architecture des ordinateurs

Sylvain Brandel

2025 – 2026

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Partie 2

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Logique propositionnelle

Pourquoi ?

- Niveau matériel = modèle logique
- Niveau programme : preuve de propriété = logique
- Niveau applicatif, BD : vérification de propriétés = logique
- ...
- Plus généralement
 - Criticité : sécurité, sûreté ...
 - Financier
 - Pas d'ambiguïté

Logique propositionnelle

Syntaxe

- $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un ensemble infini de variables propositionnelles
- Ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel : ensemble inductif
 - x variable propositionnelle alors $x \in \mathcal{F}$
 - $\perp \in \mathcal{F}$
 - Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\neg A \in \mathcal{F}$
 - Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $A \vee B \in \mathcal{F}$, $A \wedge B \in \mathcal{F}$, $A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
- Notation : $A \Leftrightarrow B : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- Priorités : $\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow$
- Associativité : à gauche pour $\wedge$ et $\vee$, à droite pour $\Rightarrow$
- Ex : $p \vee q \Rightarrow r$

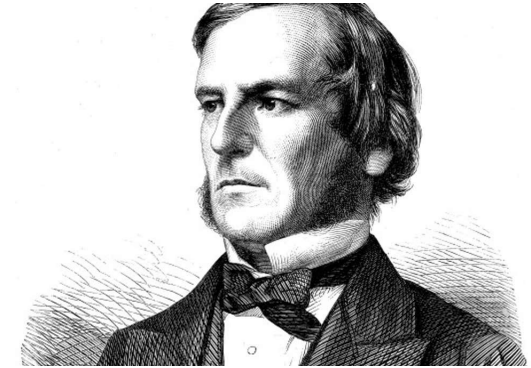
Logique propositionnelle

Sémantique

- Sens des formules → interprétation dans l'algèbre de Boole
- Interprétation du calcul propositionnel : fonction $I : V \rightarrow \mathbb{B}$
 - $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$: variables
 - $\mathbb{B} = \{0,1\}$
- I étendue à $\mathcal{F}$
 - Cas des variables déjà traité
 - $I(\perp) = 0$
 - $A \in \mathcal{F}$ alors $I(\neg A) = \overline{I(A)}$
 - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \vee B) = I(A) + I(B)$
 - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \wedge B) = I(A) \cdot I(B)$
 - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \Rightarrow B) = I(A) \Rightarrow I(B)$

Seule vérité autorisée

Algèbre de Boole



- George Boole 1815 – 1864 (Royaume-Uni)
- Booléens : oui, non ; 0, 1 ; haut, bas ; rouge, noir ; etc.
- Relation d'ordre : $0 < 1$
- Soit $\mathbb{B} = \{0,1\}$. Opérations :
 - $\bar{} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ complément
 - $+: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ $\cup$, ou, disjonction, max
 - $\cdot : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ $\cap$, et, conjonction, min
 - $\Rightarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ si ... alors, implication

Algèbre de Boole

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Algèbre de Boole

- 0 : minimum, 1 maximum
- $x \cdot 1 = x$ $x \cdot 0 = 0$
- $x + 0 = x$ $x + 1 = 1$
- Complément : $x \cdot \bar{x} = 0$ $x + \bar{x} = 1$
- Commutativité
- Associativité
- Distributivité
- De Morgan :
 - $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$
 - $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$

Algèbre de Boole

Tables de vérité

- Idée : notation par extension
- Une **ligne** par valeurs possible des variables
- Présentation des sous-fonctions en **colonnes**
- **Fonctions booléennes** : par extension, une fonction par table de vérité
→ **combien ?**

Interprétations

- Interprétation : fonction $I : V \rightarrow \mathbb{B}$

- Soit A une formule.

$$I(A) = 1 : I \text{ satisfait } A \quad \text{noté } I \models A$$

- Ex :

- Si $I(p) = 0$ et $I(q) = 0$ et $I(r) = 0$ alors $I \models p \vee q \Rightarrow r$
- Si $I(p) = 1$ et $I(q) = 1$ et $I(r) = 0$ alors I ne satisfait pas $p \vee q \Rightarrow r$

- Soit F un ensemble de formules.

$$\text{Si } I \models A \text{ pour tout } A \in F : I \text{ satisfait } F \quad \text{noté } I \models F$$

- Ex :

- Si $I(p) = 1$ alors $I \models \{p \vee q, \neg p \Rightarrow r\}$
- Si $I(p) = 1$ alors I ne satisfait pas $\{p \vee q, \neg p\}$

Interprétations

- A **tautologie**, ou A **valide** noté $\models A$
si **pour toute** interprétation I , $I \models A$
- F **contradictoire**, ou F **non satisfiable**
s'il n'existe **aucune** interprétation I telle que $I \models F$
- F **satisfiable**
s'il existe **une** (au moins) interprétation I telle que $I \models F$
- F **déduit sémantiquement** A noté $F \models A$
si **toute** interprétation satisfaisant F satisfait aussi A
- A et B **sémantiquement équivalentes** noté $A \equiv B$
si $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$

Logique propositionnelle

Modélisation

- Un logicien écoute un étudiant énumérer ses ressentis à propos des cours qu'il suit :
 - « J'aime la logique ou j'aime l'informatique, »
 - « Si j'aime l'informatique alors j'aime la logique. »
- Le logicien en déduit que l'étudiant aime la logique. Pourquoi ?
- Soient a et b deux variables propositionnelles :
 - a **représente** « j'aime la logique »
 - b **représente** « j'aime l'informatique »
- Les deux phrases de l'étudiant **représentées** par :
 1. $a \vee b$
 2. $b \Rightarrow a$
- Dédution du logicien **représentée** par a
- **Démontrer** $a \vee b, b \Rightarrow a \models a$

Logique propositionnelle

Remplacements

- **Remplacement** d'une variable p par une formule B dans une formule A , noté $A[p := B]$, défini par **induction** sur A :
 - $p[p := B] = B$
 - $q[p := B] = q$ si $q \neq p$
 - $\perp [p := B] = \perp$
 - $\neg A[p := B] = \neg(A[p := B])$
 - $(A_1 \vee A_2)[p := B] = (A_1[p := B]) \vee (A_2[p := B])$
 - $(A_1 \wedge A_2)[p := B] = (A_1[p := B]) \wedge (A_2[p := B])$
 - $(A_1 \Rightarrow A_2)[p := B] = (A_1[p := B]) \Rightarrow (A_2[p := B])$
- Ex : $(p \wedge q \Rightarrow q)[q := r \vee s] = ?$

Logique propositionnelle

Propositions

- Proposition 1. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, F ensemble de formules.
 - $F \models A \Rightarrow B$ si et seulement si $F, A \models B$,
 - $F \models A$ si et seulement si $F, \neg A$ contradictoire.
- Proposition 2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, p une variable, I une interprétation.
 I' définie par $I'(p) = I(B)$ et $I'(q) = I(q)$ si $q \neq p$
On a $I(A[p := B]) = I'(A)$
- Proposition 3. A, A', B, B' des formules, p une variable.
 - Si $\models A$ alors $\models A[p := B]$
 - Si $A \equiv A'$ alors $A[p := B] \equiv A'[p := B]$
 - Si $B \equiv B'$ alors $A[p := B] \equiv A[p := B']$

Logique propositionnelle

Quelques équivalences

$$A \wedge A \equiv A$$

$$A \vee A \equiv A$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

$$\perp \wedge A \equiv \perp$$

$$\perp \vee A \equiv A$$

$$\neg\neg A \equiv A$$

Logique propositionnelle

Forme Clausale

- Littéral :
variable ou négation de variable
- Clause :
disjonction de littéraux (éventuellement un seul)
- FNC (Forme Normale Conjonctive) :
conjonction de disjonction de littéraux (clauses)
(éventuellement une seule)
- FND (Forme Normale Disjonctive) :
disjonction de conjonctions de littéraux
(éventuellement une seule)

Logique propositionnelle

Forme Clausale

- Proposition 4 : pour toute formule $A \in \mathcal{F}$
on a une formule $A' \in \mathcal{F}$ et une formule $A'' \in \mathcal{F}$ telles que
 - $A \equiv A' \equiv A''$
 - A' est en FNC
 - A'' est en FND

Algèbre de Boole

- Tables de vérité

- Ex (binaire) :

	x	y	S
m_0	0	0	0
m_1	0	1	1
m_2	1	0	1
m_3	1	1	0

- Termes produits : distinction de lignes
- m_i : ligne i parmi n

Algèbre de Boole

- Terme produit : **intersection** des **variables d'entrée**,
complémentées si valeur 0
non complémentées si valeur 1
- Expression de S : $m_0.S_0 + m_1.S_1 + m_2.S_2 + m_3.S_3$ $\sum_i (m_i.S_i)$
 - Un seul m_i non 0
 - $1 . S_i = S_i$
 - $m_i . 1 = m_i$
 - $x + 0 = x$

→ Forme canonique : Forme Normale Disjonctive

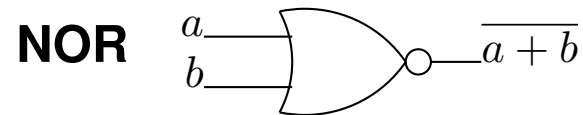
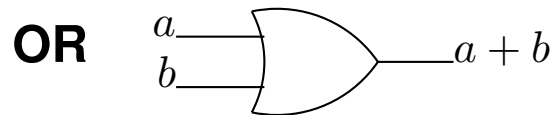
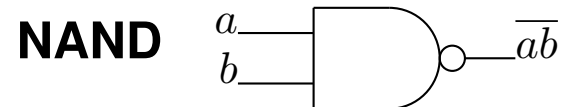
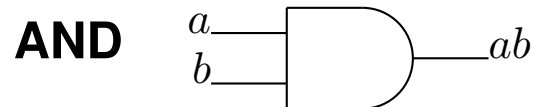
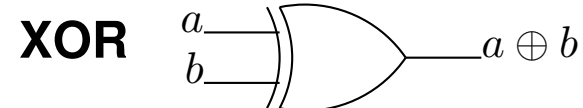
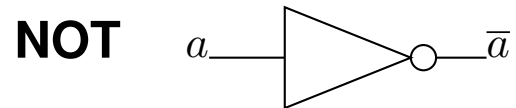
Union des **termes produits** pour lesquels la fonction vaut 1
- Notation $\sum m$ (*liste des termes produits pertinents*)

Algèbre de Boole

- Forme Normale Disjonctive
- Toutes fonctions booléennes exprimables avec et, ou, non
- De plus :
 - $\overline{x.1} = \bar{x}$ $\bar{x} = \overline{x.x}$
 - $\overline{1.\bar{x}.\bar{y}} = x.y$ $x.y = \overline{\overline{x}.\overline{y}} = \overline{\overline{x.y}.\overline{x.y}}$
 - $\overline{\overline{1.x}.\overline{1.y}} = x + y$ $x + y = \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \overline{\overline{x.x}.\overline{\overline{y.y}}}$
- Toutes fonctions booléennes exprimables avec non-et (ou non-ou)
- Ex : DNF $\rightarrow$ NAND-NAND

Algèbre de Boole

- Notation :



- Ex : XOR avec 5 portes simples (AND, OR, NOT)
- Ex : XOR avec 4 portes simples