LC – logique classique

Sylvain Brandel

2024 – 2025

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Partie 1

INTRO, RAPPELS, INDUCTIFS …

Fonctionnement

- CM : 8 x 1h30 (8 → 6 séances)
  - Mardi 14h
  - Cela parait évident mais … Silence dans l'amphi. S'il vous plait.
- TD : 8 x 1h30
  - Généralement lundi 8h
  - Début des TD lundi 9 septembre 2024
- TP : 4 x 1h30 (4 → 6 séances)
  - Généralement lundi 9h45 ou 11h30, après le TD de LF
  - Début des TP mardi 1er octobre 2024 14h ou 15h45

- Fin des enseignements mardi 17 décembre 2024 (hors rattrapage)

- Lien fort avec LF

Planning global

		LUNDI			MARDI		
S. Ens	Date	8:00-09:30	9:45-11:15	11:30-13:00	14:00-15:30	15:45-17:15	17:30-19:00
0	02/09/24		LF CM1		LC CM1	LF CM2	
1	09/09/24	LC TD1	LF TD1		LC CM2	LF CM3	
2	16/09/24	LC TD2	LF TD2		LC CM3	LF CM4	
3	23/09/24	LC TD3	LF TD3		LF TP1		
4	30/09/24	LC TD4	LF TP2		LC TP1		
5	07/10/24	LF TD4	LC TP2		LC CM4	LF CM5	
6	14/10/24	LC TD5	LF TD5		LC CM5	LF CM6	
7	21/10/24	LC TD6	LF TP3		LC CM6	LF CM7	
	28/10/24	Pas d'enseignement en licence du 28/10 au 01/11					
8	04/11/24	LF TD6	LC TP3		LC CM7	LF CM8	
9	11/11/24	Férrié			LC CM8	LF CM9	
10	18/11/24	LC TD7	LF TP4			LF CM10	
11	25/11/24	LC TD8	LC TP4				
12	02/12/24	LC LF TP noté					
13	09/12/24						
	16/12/24				LC ECA	LF ECA	
	23/12/24	Vacances					
	30/12/24						
	06/01/25						
	13/01/25						

TP

- En Coq
  - https://softwarefoundations.cis.upenn.edu

Evaluation

- http://sylvain.brandel.pages.univ-lyon1.fr/logique/
- UE en CCI (Contrôle Continu Intégral)
  - ECA (2 sessions) Coef. : 1
    - 1ère session mardi 17 décembre 2024 14h
    - 2de session en juin 3034 …
  - TP noté Coef. : 1
    - Lundi 2 décembre 2024
  - Interros « surprise » (+/- 4) Coef. : 1 pour la moyenne de ces CC
- ATTENTION : Nouveauté 2023 – absences aux contrôles
  - ~~ABJUS => note neutralisée ; ABINJ => zéro~~
  - Plus de distinction pédagogique entre ABJUS et ABINJ
    - Un absent n'a pas été évalué, l'absence justifiée ou non a le même impact sur la note

De votre côté

- Travail personnel conséquent
- Se préparer à l’avance
- Ne pas attendre que les réponses viennent toutes seules

- Lisez vos mails …

- Contactez-moi, par mail, précisez LC

Motivations

- Informatique fondamentale
- Programmation (≠ pratique d'un langage de prog)
- Lien avec les langages de programmation
  - L1 : algo prog récursive
  - L2 : prog fonctionnelle
- Vous intéresser …

Pourquoi

JUILLET 2024

DATE	Pleines mers sur fond orange				Basses mers sur fond blanc			
	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.
1 L	01:09	58	06:47	---	13:53	58	19:23	---
2 M	02:16	59	07:54	---	14:52	60	20:29	---
3 M	03:18	63	08:56	---	15:45	65	21:29	---
4 J	04:14	68	09:51	---	16:33	70	22:23	---
5 V	05:03	72	10:41	---	17:17	74	23:13	---
6 S	05:47	76	11:26	---	17:58	77	23:58	---
7 D	06:26	78	12:08	---	18:37	78	--:--	---
8 L	00:40	---	07:03	77	12:48	---	19:13	76
9 M	01:20	---	07:37	75	13:26	---	19:48	72
10 M	01:57	---	08:10	70	14:05	---	20:24	67
11 J	02:34	---	08:45	64	14:43	---	21:02	60
12 V	03:13	---	09:24	56	15:24	---	21:43	53
13 S	03:54	---	10:11	49	16:10	---	22:31	45
14 D	04:40	---	11:11	42	17:03	---	23:30	39
15 L	05:35	---	12:21	37	18:04	---	--:--	---
16 M	00:40	36	06:40	---	13:30	37	19:09	---
17 M	01:52	38	07:45	---	14:30	41	20:12	---
18 J	02:57	45						
19 V	03:52	55						
20 S	04:40	65						
21 D	05:23	76	11:07	---	17:35	81	23:33	---
22 L	06:04	85	11:51	---	18:17	89	--:--	---
23 M	00:18	---	06:45	92	12:35	---	19:01	94
24 M	01:02	---	07:27	95	13:19	---	19:47	94
25 J	01:47	---	08:12	93	14:04	---	20:35	91
26 V	02:32	---	08:59	87	14:51	---	21:27	82
27 S	03:19	---	09:52	77	15:43	---	22:23	71
28 D	04:11	---	10:55	65	16:41	---	23:30	59
29 L	05:10	---	12:13	54	17:48	---	--:--	---
30 M	00:48	50	06:18	---	13:35	47	19:05	---
31 M	02:08	47	07:37	---	14:46	48	20:22	---

JUILLET

	PLEINES MERS				BASSES MERS	
	Heure	Coef	Heure	Coef	Heure	Heure
1L	01:09	58	13:53	58	06:47	19:23
2M	02:16	59	14:52	60	07:54	20:29
3M	03:18	63	15:45	65	08:56	21:29
4J	04:14	68	16:33	70	09:51	22:23
5V	05:03	72	17:17	74	10:41	23:13
6S	05:47	76	17:58	77	11:26	23:58
7D	06:26	78	18:37	78	12:08	--:--
8L	00:40	77	19:13	76	00:40	12:48
9M	01:20	75	19:48	72	01:20	13:26
10M	01:57	70	20:24	67	01:57	14:05
11J	02:34	64	21:02	60	02:34	14:43
12V	03:13	56	21:43	53	03:13	15:24
13S	03:54	49	22:31	45	03:54	16:10
14D	04:40	42	23:30	39	04:40	17:03
15L	05:35	37	--:--	---	05:35	18:04
16M	00:40	36	13:30	37	06:40	19:09
17M	01:52	38	14:30	41	07:45	20:12
18J	02:57	45	15:23	50	08:43	21:08
19V	03:52	55	16:10	60	[illegible]	[illegible]
22L	06:04	85	18:17	89	11:51	--:--
23M	00:18	92	19:01	94	00:18	12:35
24M	01:02	95	19:47	94	01:02	13:19
25J	01:47	93	20:35	91	01:47	14:04
26V	02:32	87	21:27	82	02:32	14:51
27S	03:19	77	22:23	71	03:19	15:43
28D	04:11	65	23:30	59	04:11	16:41
29L	05:10	54	--:--	---	05:10	17:48
30M	00:48	50	13:35	47	06:18	19:05
31M	02:08	47	14:46	48	07:37	20:22

JUILLET

Date	Pleines mers						Basses mers			
	Heure h mm	haut m	Coef	Heure h mm	haut m	Coef	Heure h mm	haut m	Heure h mm	haut m
lun. 01	01:09	4.90	58	13:53	4.75	58	06:47	2.04	19:23	2.05
mar. 02	02:16	4.89	59	14:52	4.86	60	07:54	2.03	20:29	1.96
mer. 03	03:18	4.93	63	15:45	5.00	65	08:56	1.95	21:29	1.83
jeu. 04	04:14	4.99	68	16:33	5.14	70	09:51	1.84	22:23	1.69
ven. 05	05:03	5.06	72	17:17	5.25	74	10:41	1.74	23:13	1.58
sam. 06	05:47	5.11	76	17:58	5.31	77	11:26	1.67	23:58	1.52
dim. 07	06:26	5.11	78	18:37	5.32	78	--:--	---	12:08	1.65
lun. 08	00:40	1.52	---	12:48	1.68	---	07:03	5.07	19:13	5.27
mar. 09	01:20	1.59	---	13:26	1.76	---	07:37	5.00	19:48	5.17
mer. 10	01:57	1.71	---	14:05	1.88	---	08:10	4.89	20:24	5.04
jeu. 11	02:34	1.86	---	14:43	2.04	---	08:45	4.76	21:02	4.89
ven. 12	03:13	2.04	---	15:24	2.20	---	09:24	4.62	21:43	4.72
sam. 13	03:54	2.22	---	16:10	2.37	---	10:11	4.48	22:31	4.56
dim. 14	04:40	2.39	---	17:03	2.51	---	11:11	4.37	23:30	4.42
lun. 15	05:35	2.53	---	18:04	2.59	---	--:--	---	12:21	4.33
mar. 16	00:40	4.35	36	13:30	4.39	37	06:40	2.58	19:09	2.56
							7:45	2.53	20:12	2.43
							8:43	2.37	21:08	2.21
							9:35	2.16	21:59	1.94
sam. 20	04:40	4.90	65	16:53	5.23	71	10:22	1.91	22:47	1.66
dim. 21	05:23	5.11	76	17:35	5.46	81	11:07	1.66	23:33	1.39
lun. 22	06:04	5.29	85	18:17	5.64	89	11:51	1.45	--:--	---
mar. 23	00:18	1.19	---	12:35	1.31	---	06:45	5.40	19:01	5.75
mer. 24	01:02	1.09	---	13:19	1.27	---	07:27	5.42	19:47	5.74
jeu. 25	01:47	1.11	---	14:04	1.33	---	08:12	5.34	20:35	5.62
ven. 26	02:32	1.24	---	14:51	1.48	---	08:59	5.17	21:27	5.40
sam. 27	03:19	1.47	---	15:43	1.70	---	09:52	4.94	22:23	5.12
dim. 28	04:11	1.76	---	16:41	1.95	---	10:55	4.72	23:30	4.84
lun. 29	05:10	2.06	---	17:48	2.17	---	--:--	---	12:13	4.57
mar. 30	00:48	4.64	50	13:35	4.55	47	06:18	2.29	19:05	2.27
mer. 31	02:08	4.57	47	14:46	4.67	48	07:37	2.36	20:22	2.20

<u>Question</u>. 27 juillet, à quelle heure la marée haute du matin ?

Pourquoi

Les candidats et étudiants suivants ne sont pas concernés par la procédure dématérialisée de recrutement :

1° Les candidats de nationalité étrangère (à l'exclusion des ressortissants de l'Espace économique européen, d'Andorre, de Suisse ou de Monaco) **et** dont le pays de résidence est couvert par le dispositif *Études en France* :
https://pastel.diplomatie.gouv.fr/etudesenfrance/dyn/public/authentification/login.html

Question. Je suis Allemand. Suis-je concerné par la procédure dématérialisée ?

Pourquoi

- Exemples anecdotiques mais des fois
  - Perte d’argent, de beaucoup d’argent
  - Pire, pertes humaines

- Définition du raisonnement formel et abstrait
- Exprimer propriétés et démonstrations

- Code rapide, mais correct ?

- Spécification et vérification du comportement des programmes
  - Univoque
  - Claire
- Aller vers du code correct

Pourquoi

- Validation de l’UE si :
  - Règles de raisonnement
  - Induction
  - Spécification au premier ordre

- Echec à l’UE si :
  - « Vous ne savez pas lire »
  - Vous ne connaissez pas votre cours (rappel TD lundi matin 8h …)

Comment

- Base de la programmation $\Leftrightarrow$ Bases du raisonnement
  - Systèmes de types
    - Discipline de types : Logique
    - Type : formule
    - Programme : preuve
    - Calcul : cut elim $\Longrightarrow$ cadre fonctionnel typé
  - Définition d'objets et d'ensembles
    - Par décision → LifLF
    - Par construction → LifLC, et aussi LifLF

      $\Longrightarrow$ LF : fonctions de reconnaissance

      $\Longrightarrow$ LC : preuves de correction
  - TP : manipulation de la programmation et du raisonnement
    - Gallina – Coq
    - Fonctionnel, fortement typé, avec filtrage
    - Plus facile que LifAP2 : pas d'excuse

Sources et références

David / Nour / Raffali

Introduction à la logique

Jean Gallier

Logic For Computer Science

Foundations of Automatic Theorem Proving

Cours

Mijoule, Forest, Coquery, Goubault-Larrecq, **Urbain**

Ensembles

- Définition d'un ensemble
  - Par extension : $E = \{a, b, c\}$
  - Par intension : $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ x \; est \; divisible \; par \; 2\}$

- Opérations ensemblistes
  - Appartient : $x \in E$: x est dans E $\quad x \notin E$: x n'est pas dans E
  - Ensemble vide : $\{\,\}$, noté $\emptyset$
  - Inclusion : $E \subset F, E \subseteq F, E \not\subset F, E \not\subseteq F$
    $E \subset F$: tous les éléments de E sont dans F
  - Ensemble des parties de E : $\mathcal{P}(E) = \{E_1 \mid E_1 \subset E\}$
  - Intersection : $E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \; et \; x \in E_2\}$
  - Union : $E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \; ou \; x \in E_2\}$
  - Différence : $E \setminus E_1 = \{x \mid x \in E \; et \; x \notin E_1\}$
  - Produit cartésien : $E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1 \; et \; x_2 \in E_2\}$
    $E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in E_i \; pour \; i \in \{1, \ldots, n\}\}$

Relations

- Relations binaires : $R \in \mathcal{P}(E_1 \times E_2)$, R est un ensemble de couples
- Relations n-aire : $R \in \mathcal{P}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n)$

  $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ est noté $R(x_1, \ldots, x_n)$

- Soit une relation $R \in \mathcal{P}(E \times E)$:
  - R réflexive si $x \in E$ alors $R(x, x)$
  - R antiréflexive si $x \in E$ alors $(x, x) \notin R$
  - R symétrique si $R(x, y)$ alors $R(y, x)$
  - R antisymétrique si $R(x, y)$ et $R(y, x)$ alors $x = y$

    ou si $R(x, y)$ et $x \neq y$ alors $(y, x) \notin R$
  - R transitive si $R(x, y)$ et $R(y, z)$ alors $R(x, z)$

  - Une relation réflexive, symétrique et transitive c'est … ?

    Relation d'équivalence
  - Une relation réflexive, antisymétrique et transitive c'est … ?

    Relation d'ordre

Relations
Stabilité en clôture

- Soient un ensemble E
  un ensemble $E_1 \in \mathcal{P}(E)$
  une relation n-aire R sur E $(R \subset E \times E \times \cdots \times E)$

- E_1 stable par R ou close par R
  si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_1$, ... , $x_{n-1} \in E_1$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ alors $x_n \in E_1$

- Si E_1 non stable par R, il existe un plus petit sous ensemble F de E
  tel que $F \supset E_1$ et F stable par R
  F est appelé clôture de E_1 par R

- Soient un ensemble E
  une relation binaire R sur E $(R \subset E \times E)$

- La Fermeture transitive de R est la plus petite relation binaire T
  telle que $T \supset R$ et T transitive

Fonctions

- Fonction f de E_1 vers E_2 : relation de E_1 vers E_2 telle que

  si $x \in E_1$ alors il existe au plus un élément $y \in E_2$ tel que $f(x, y)$
  - y : image de x par f
  - On note $y = f(x)$
  - Domaine de f : sous-ensemble de E_1 des éléments ayant des images par f

- Composition de fonctions : $\circ$

$$f \circ g\ (x) = f(g(x)) \qquad E_1 \xrightarrow{g} E_2 \xrightarrow{f} E_3$$

Fonctions

- Application f de E_1 vers E_2 : fonction telle que domaine de $f = E_1$

- Une application f est injective
  Si $y \in E_2$, alors au plus un élément x de E_1 est tel que $f(x) = y$

- Une application f est surjective
  Si $y \in E_2$, alors au moins un élément x de E_1 est tel que $f(x) = y$

- Une bijection est une application injective et surjective

Fonctions

- Fonction à « plusieurs arguments » :

  $f : E \to F$ avec $E = \{ E_0 \times E_1 \times \ldots \times E_n \}$

  $$f\ (\ (x_0, x_1, \ldots, x_n)\ )$$

- Sous forme curryfiée :

  $f : E_0 \to (E_1 \to \ldots (E_n \to F) \ldots)$

  $$(\ \ldots (f\ (x_0))\ (x_1) \ldots)\ (x_n)$$

Fonctions

- Deux ensembles sont équipotents ou ont même cardinal
  ssi il existe une bijection de l'un vers l'autre

- Un ensemble est fini s'il est équipotent à $\{1, 2, \ldots n\}$ pour tout entier n

- Un ensemble infini est un ensemble non fini

- On dit qu'un ensemble est infini dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$

- S'il n'existe pas de bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$
  alors on dit que E est infini non dénombrable

- Proposition *Il existe des ensembles infinis non dénombrables*

Ensembles inductifs

- Soit E un ensemble
- Règle sur E : $(u_1, u_2, \dots u_n) \ \rightarrow v$ avec $(u_1, u_2, \dots u_n) \ \in E \times \cdots \times E$ et v $\in E$
- R : ensemble de règles sur E $B = \{v \ \in E \mid \ \rightarrow v \ \in R\}$
- Schéma d'induction : (E, R)
- Partie close pour (E, R) : $F \ \subseteq E$ tq
  pour toute règle $(u_1, u_2, \dots u_n) \ \rightarrow v \ \in R$, si tous $u_i \in F$ alors $v \in F$
- Ensemble inductif de (E, R) : la plus petite partie close pour (E, R)
- Ex : $(\mathbb{R}, \{\rightarrow 0, n \rightarrow n + 1\})$
  $\mathbb{N}$ partie close, $\mathbb{Z}$ aussi, $\mathbb{N}$ la plus petite

Ensembles inductifs
Caractérisation 1

- Proposition

  Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

  $X = \bigcap_{Y \in F} Y$ avec $F = \{Y \subseteq E \ partie\ close\ pour\ (E, R)\}$

- Preuve
  - Égalité d'ensembles : double inclusion
  - On pose $G = ensemble\ de\ gauche$ et $D = ensemble\ de\ droite$
  - On montre
    1) $G \supseteq D$
    2) $G \subseteq D$
  - On en déduit que $G = D$

ici : $G = X$ et $D = \bigcap_{Y \in F} Y$

→ preuves, fonctions

Ensembles inductifs
Preuve par induction

- Idée : objets vérifiant une propriété données = partie close

- Théorème

  Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)
  Soit P une propriété sur X telle que
  - $P(v)$ pour tout $v \in B$
  - $P(v)$ pour tous $u_1, u_2, \dots, u_n$ tq $(u_1, u_2, \dots, u_n) \to v \in R$
    et $P(u_1), P(u_2), \dots, P(u_n)$

  Alors $P(x)$ pour tout $x \in X$

- Preuve

Ensembles inductifs
Fonctions

- Idée : Y sur lequel on sait calculer une fonction donnée est clos

- Théorème

  Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

  Soit $f : X \to F$ une fonction telle que

  - $f(v) \in F$ pour tout $v \in B$
  - $f(v)$ avec $f(u_1), f(u_2), \dots f(u_n)$ pour tous $u_1, u_2, \dots, u_n$ et $(u_1, u_2, \dots, u_n) \to v \in R$

  Alors on a défini $f(x)$ pour tout $x \in X$

- Exemple

  → Construction des éléments ?

Ensembles inductifs
Caractérisation 2

- Proposition

  Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ avec $X_0 = B,\ X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$

- Preuve
  - On pose $G = X$ et $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$
  - On montre
    1) $G \subseteq D$ par induction sur X (donc avec les règles de constructions de X)
    2) $G \supseteq D$ par induction sur $\mathbb{N}$ (donc avec les règles de constructions de $\mathbb{N}$)
- Idées
  1) $X =$ éléments accessibles depuis B par un nombre fini d'étapes de R
  2) $X =$ éléments permettant de *descendre* et atteindre B
     en un nb fini d'étapes de R (à l'envers)

Ensembles inductifs

Caractérisation 2

- Ordre strict sur E : relation binaire sur E, antiréflexive et transitive

- Ordre strict $<$ bien fondé

  il n'y a pas de suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout i, $x_{i+1} < x_i$

- Exemples

- Idée : descendre et atteindre le minimum en un nombre fini d'étapes

- E et $<$ bien fondé sur E
- Schéma inductif définissant E :

$$\begin{cases} & \rightarrow \quad u \quad \text{pour tout } u \text{ minimal pour } < \\ u_1, u_2, \dots, u_n & \rightarrow \quad v \quad \text{pour tout } u_i < v \end{cases}$$

→ preuves, fonctions

Ensembles inductifs

Preuve par induction bien fondée

- E et $<$ bien fondé sur E

- Reformulation

Soit E un ensemble satisfaisant une propriété P
Soit $F \subseteq E$

Si pour tout $x \in E$, lorsque tous $y \in F$ pour $y < x$ alors $x \in F$
alors pour tout $x \in E$, $x \in F$

- Exemple

Ensembles inductifs

Fonctions

- E et $<$ bien fondé sur E
- Fonctions récursives : appels sur valeurs décroissantes pour $<$