LC – Logique classique

Sylvain Brandel

2024 – 2025

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Partie 3

LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Vocabulaire

- Symboles d'un langage (vocabulaire) du premier ordre :
  - $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{f, g, h, \dots\}$: symboles de fonctions avec fonction d'arité :

    $$ar : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

  - $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{a, b, c, \dots\}$: symboles de constantes (fonctions d'arité 0)
  - $\mathcal{S}_{\mathcal{R}} = \{P, Q, R, \dots\}$: symboles de relations (prédicats) avec fonction d'arité

    $$ar : \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \longrightarrow \mathbb{N}$$

- Remarques
  - $\perp$ est un symbole de relation 0-aire
  - $=$ est un symbole de relation binaire

Termes

- On ajoute un ensemble infini de variables :
  - $\mathcal{V} = \{x, y, z \ldots\}$: ensembles de variables
- Ensemble $\mathcal{T}$ des termes sur un langage $\mathcal{L}$:
  - Les variables et les constantes sont des termes
  - Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et f un symbole de fonction tq $ar(f) = n$,
    alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme
- Un terme clos est un terme qui ne contient pas de variables
- $\mathcal{T}$ est le plus petit ensemble contenant les variables, les constantes,
  et stable par l'application des symboles de fonctions de $\mathcal{L}$ à des termes

Substitutions

- Substitution : fonction $\sigma : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{T}$, domaine noté $dom(\sigma)$
- On note $[x_1 \coloneqq t_1, \ldots, x_n \coloneqq t_n]$ la substitution de domaine $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui associe t_i à x_i pour $1 \leq i \leq n$
- Application d'une substitution σ sur un terme t, notée $t\sigma$:
  - Si $t = a$ (a : constante), $t\sigma = a$
  - Si $t = x,\ x \in dom(\sigma)$, $t\sigma = \sigma(x)$
  - Si $t = y,\ y \notin dom(\sigma)$, $t\sigma = y$
  - Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $t\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
- Le terme u filtre le terme v s'il existe σ tq $u\sigma = v$
- Les termes u et v sont unifiables s'il existe σ tq $u\sigma = v\sigma$

Formules

- On ajoute les connecteurs et quantificateurs :
  - Connecteurs du calcul propositionnel : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$
  - Quantificateur universel : $\forall$
  - Quantificateur existentiel : $\exists$

- Ensemble $\mathcal{F}$ des formules :
  - Si $t_1, \dots, t_n$ sont des termes et R un symbole de relation tq $ar(R) = n$,
    alors $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule (atomique)
  - Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule
  - Si A et B sont des formules, alors $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ sont des formules
  - Si A est une formule et x une variable, alors $\forall x\ A$ et $\exists x\ A$ sont des formules

Formules

- Ensemble des sous-formules d'une formule A, noté $SF(A)$:
  - Si A est atomique, $SF(A) = \{A\}$
  - Si $A = \neg B \; ou \; \forall x \, B \; ou \; \exists x \, B$, $SF(A) = \{A\} \cup SF(B)$
  - Si $A = B \wedge C \; ou \; B \vee C \; ou \; B \Rightarrow C$, $SF(A) = \{A\} \cup SF(B) \cup SF(C)$

- Langage d'une formule A, noté $\mathcal{L}(A)$: l'ensemble (fini) des symboles de A

- Taille d'une formule A, notée $\tau(A)$:

  nombre de connecteurs et de quantificateurs apparaissant dans A :
  - Si A est atomique, $\tau(A) = 0$
  - Si $A = \neg B \; ou \; \forall x \, B \; ou \; \exists x \, B$, $\tau(A) = 1 + \tau(B)$
  - Si $A = B \wedge C \; ou \; B \vee C \; ou \; B \Rightarrow C$, $\tau(A) = 1 + \tau(B) + \tau(C)$

Variables libres et liées

- Ensemble des variables d'un terme t, noté $V(t)$:
  - Si t est une variable x, $V(t) = \{x\}$
  - Si t est une constante, $V(t) = \emptyset$
  - Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

- Ensemble des variables libres d'une formule A, noté $FV(A)$:
  - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$ (R : symbole de relation), $FV(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
  - Si $A = \neg B$, $FV(A) = FV(B)$
  - Si $A = B \wedge C\ ou\ B \vee C\ ou\ B \Rightarrow C$, $FV(A) = FV(B) \cup FV(C)$
  - Si $A = \forall x\ B\ ou\ \exists x\ B$, $FV(A) = FV(B) \setminus \{x\}$

- Ensemble des variables liées (muettes) d'une formule A, noté $BV(A)$:
  - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$ (R : symbole de relation), $BV(t) = \emptyset$
  - Si $A = \neg B$, $BV(A) = BV(B)$
  - Si $A = B \wedge C\ ou\ B \vee C\ ou\ B \Rightarrow C$, $BV(A) = BV(B) \cup BV(C)$
  - Si $A = \forall x\ B\ ou\ \exists x\ B$, $BV(A) = BV(B) \cup \{x\}$

Variables libres et liées

- Deux formules sont α-équivalentes si elles sont syntaxiquement identiques à un renommage près des occurrences des variables liées

- Si pour une formule A, $FV(A) = \emptyset$, A est dite close

- Si pour une formule A, $FV(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$,
  la fermeture (universelle) de A est la formule close $\forall x_1 \dots \forall x_n\ A$

Substitutions

- Application d'une substitution σ sur une formule A, notée $A\sigma$:
  - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$, $A\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
  - Si $A = \neg B$, $A\sigma = B\sigma$
  - Si $A = B\ \theta\ C$ avec $\theta \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, $A\sigma = B\sigma\ \theta\ C\sigma$
  - Si $A = Qx\ B$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$, si $x \notin \bigcup_{y \in dom(\sigma \setminus \{x\})} V(\sigma(y))$, $A\sigma = Qx\ B\sigma$

(on remplace les variables non « protégées » par des quantificateurs)

Formules

- Si on se restreint aux symboles de relation d'arité 0
  - Une formule ne contient pas de variables
  - Une formule ne contient pas de termes
  - Une formule ne contient pas de quantificateurs

  On obtient … les formules du calcul propositionnel !

- Rappel, $\perp$ est un symbole de relation 0-aire

- Une « variable » propositionnelle est une relation 0-aire (une formule)

Sémantique

- Structure d'interprétation pour un langage $\mathcal{L}$: $\mathcal{SI} = (D, I)$
  - D : domaine, ensemble non vide
  - I : fonction d'interprétation
    - Pour chaque constante $c \in \mathcal{S}_\mathcal{C}$, $I(c) \in D$
    - Pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$, $ar(f) = n$, $I(f) : D^n \longrightarrow D$
    - Pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{S}_\mathcal{R}$, $ar(R) = n$, $I(R) : D^n \longrightarrow \mathbb{B}$

- Affectation de valeurs aux variables :
  - Fonction $v : \mathcal{V} \longrightarrow D$
  - $v[x \coloneqq d]$ pour $d \in D$ est la fonction v' :
    - $v'(x) = d$
    - $v'(y) = v(y)$ pour $y \neq x$

Sémantique

- Valeur d'un terme t, notée $I_v(t)$:
  - Si $t = a$ (a : constante), $I_v(t) = I(a)$
  - Si $t = x$ (x : variable), $I_v(t) = v(x)$
  - Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $I_v(t) = I(f)(I_v(t_1), \dots, I_v(t_n))$

- Valeur de vérité d'une formule A, notée $I_v(A)$:
  - Si $A = \perp$, $I_v(A) = 0$
  - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$, $I_v(A) = I(R)(I_v(t_1), \dots, I_v(t_n))$
  - Si $A = \neg B$, $I_v(A) = \overline{I_v(B)}$
  - Si $A = B \wedge C$, $I_v(A) = I_v(B) \cdot I_v(C)$
  - Si $A = B \vee C$, $I_v(A) = I_v(B) + I_v(C)$
  - Si $A = B \Rightarrow C$, $I_v(A) = I_v(B) \dot{\Rightarrow} I_v(C)$
  - Si $A = \forall x\, B$, $I_v(A) = 1$ si pour tout $d \in D$ on a $I_{v[x:=d]}(B) = 1$, 0 sinon
  - Si $A = \exists x\, B$, $I_v(A) = 1$ s'il existe un $d \in D$ tel que $I_{v[x:=d]}(B) = 1$, 0 sinon

Sémantique

A et B : formules, E : ensemble de formules, I : interprétation

- $I_v(A)$ ne dépend pas des variables liées
- Si $BV(A) = \emptyset$, alors $I_v(A) = I_{v'}(A)$ pour toutes valuations v et v'

- Si $I_v(A) = 1$, alors I_v satisfait A, noté $I_v \vDash A$
- Si $I_v \vDash A$ pour tout $A \in E$, alors I_v satisfait E, noté $I_v \vDash E$
- S'il n'existe aucune I_v telle que $I_v \vDash E$, alors E contradictoire
- Si $I_v \vDash A$ pour tout I et tout v, alors A valide noté $\vDash A$
- Si $I_v \vDash A$ pour tout I et tout v telles que $I_v \vDash E$, alors E déduit sémantiquement A noté $E \vDash A$
- Si $\{A\} \vDash B$ et $\{B\} \vDash A$, alors A et B sont sémantiquement équivalentes noté $A \equiv B$

Quelques résultats

- Proposition

  A et B formules, E ensemble de formules

  - $E \vDash A \Rightarrow B$ ssi $E \cup \{A\} \vDash B$
  - $E \vDash A$ ssi $E \cup \{\neg A\}$ contradictoire

Quelques équivalences remarquables

- Celles du calcul propositionnel

- $\forall x \neg A \equiv \neg \exists x A$
- $\exists x \neg A \equiv \neg \forall x A$

- Si $y \notin FV(A)$ alors
  - $\forall x A \equiv \forall y A[x \coloneqq y]$
  - $\exists x A \equiv \exists y A[x \coloneqq y]$

- Si $x \notin FV(B)$ alors
  - $(\forall x A) \wedge B \equiv \forall x (A \wedge B)$
  - $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$
  - $(\exists x A) \wedge B \equiv \exists x (A \wedge B)$
  - $(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$

Quelques équivalences remarquables

- $\forall x\, \forall y\, A \equiv \forall y\, \forall x\, A$
- $\exists x\, \exists y\, A \equiv \exists y\, \exists x\, A$

- $\exists y\, \forall x\, A \vDash \forall x\, \exists y\, A$

- ATTENTION, on n'a pas $\forall x\, \exists y\, A \vDash \exists y\, \forall x\, A$