Durée 1h. Une feuille A4 manuscrite autorisée. **Répondez dans les cadres**. Lisez bien toutes les questions. **Pas de crayon**.

Partie 1. Logique propositionnelle

Exercice 1. Un ensemble de connecteurs logiques est dit fonctionnellement complet s'il permet d'exprimer toute fonction booléenne. Par exemple, l'ensemble $\{\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow\}$ est fonctionnellement complet.

a) Avec les éléments du cours, justifiez que $\{\neg,\ \wedge,\ \vee\}$ est fonctionnellement complet.
b) Montrez que $\{\neg,\ \wedge\}$ est fonctionnellement complet.

Exercice 2. Soit l'opérateur ternaire noté $if\ A\ then\ B\ else\ C$ sémantiquement équivalent à $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$. Une formule écrite uniquement avec le connecteur $if\ the\ else$, les constantes $\perp$ (faux) et $\top$ (vrai) ainsi que des variables est appelée une ITE.

a) Montrez que toute formule propositionnelle est équivalente à une ITE. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 1.
b) Montrez sémantiquement que les formules F et G ci-dessous sont équivalentes :
   $F = if\ (if\ A\ then\ B\ else\ C)\ then\ B'\ else\ C'$
   $G = if\ A\ then\ (if\ (B\ then\ B'\ else\ C')\ else\ (if\ C\ then\ B'\ else\ C')$
c) Une ITE est dite *simple* si dans toute expression $if\ A\ then\ B\ else\ C$ la composant, A est une variable. Montrez qu'on peut transformer toutes ITE en ITE simple équivalente.
d) Une ITE est dite *normale* si elle est simple et si pour toute expression $if\ X\ then\ B\ else\ C$ la composant, la variable X n'apparait ni dans B, ni dans C. Montrez qu'on peut transformer toute ITE en ITE normale équivalente.
e) Prouvez directement que toute formule propositionnelle est équivalente à une ITE normale.

Exercice 3. On considère les propositions suivantes :

- Si Manon joue à Zelda et à Mario kart, alors joue à GTA,
- Manon est contente si elle joue à Zelda,
- Si Manon est contente, elle joue à Mario kart,
- Manon joue à Zelda ou à GTA.

a) Modélisez ces formules sous forme de formules propositionnelles.
b) Montrez que Manon joue à GTA en utilisant les règles de déduction naturelle.

Exercice 4. Montrez par résolution la formule $\neg B \wedge \neg A \wedge \neg C \Rightarrow \neg(B \vee A \vee C)$.

Partie 2. Logique du premier ordre

Exercice 5. Prouvez en déduction naturelle que la relation d'égalité sur les nat est une relation d'équivalence.

Exercice 6. On souhaite calculer la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ en utilisant le principe de résolution.
On définit pour cela une relation $R_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ qui est vraie ssi $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, sous forme d'un ensemble de clauses C.
Pour calculer $f(t_1, \ldots, t_n)$, pour des termes clos $t_1, \ldots t_n$, on applique la résolution à $C,\ \neg R_f(t_1, \ldots, t_n, y)$.
C n'étant pas contradictoire, la résolution dérive $R_f(t_1, \ldots, t_n, u)$ qui est une instance de $R_f(t_1, \ldots, t_n, y)$. Par définition de R_f, on a alors $u = f(t_1, \ldots, t_n)$.

a) Définissez des symboles de constantes, fonctions et relations permettant d'exprimer les listes d'entiers.
b) Donnez des clauses permettant de définir la concaténation de deux listes.
c) Appliquez le principe de résolution pour calculer la concaténation de deux listes vides, et la concaténation d'une liste à un élément et d'une liste vide.
d) Donnez des clauses permettant de définir l'opération qui calcule le miroir d'une liste.