

TD partie 1 – Rappels maths – ensembles inductifs

Rappels mathématiques

- Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture :
 - $\mathbb{N}$ pour l'addition,
 - $\mathbb{N}$ pour la soustraction,
 - $\mathbb{Z}$ pour la soustraction,
 - L'ensemble des entiers naturels impairs pour la multiplication,
 - $\mathbb{Z}^-$ pour la soustraction,
 - $\mathbb{Z}^-$ pour la multiplication,
 - L'ensemble des intervalles fermés de $\mathbb{N}$ pour $\cup$,
 - L'ensemble des intervalles fermés de $\mathbb{N}$ pour $\cap$.
- Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).
 - La fermeture réflexive transitive d'une relation R , notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
 - La fermeture transitive de R est notée R^+ .
 Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation binaire $R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)\}$.

Ensembles inductifs

- Montrez par induction sur $\mathbb{N}$ que la somme des n premiers entiers est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.
- Montrez par induction sur $\mathbb{N}$ que $n^4 - 4n^2$ est divisible par 3.
- On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par les règles :

$$\begin{cases} \rightarrow (n, 0) & \text{c-à-d } (n, 0) \in D \\ (n, n') \rightarrow (n, n+n') & \text{c-à-d } (n, n+n') \in D \text{ si } (n, n') \in D \end{cases}$$
 - Donnez quelques éléments de D ,
 - Montrez que pour deux entiers naturels n et n' on a $(n, n') \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n' = kn$.
- Soit V un ensemble de lettres. Donnez une définition inductive des palindromes sur V .
- On définit inductivement l'ensemble $X : \varepsilon \in X$; si $u \in X$ alors $aub \in X$.
On pose $Y = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrez que $X = Y$. Par convention $a^0 = \varepsilon$.
- On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des listes d'entiers défini inductivement par les règles :

$$\begin{cases} \rightarrow [] & \text{c-à-d } [] \in \mathcal{L} \\ l \rightarrow e :: l, e \in \mathbb{N} & \text{c-à-d } e :: l \in \mathcal{L} \text{ si } l \in \mathcal{L} \text{ pour } e \in \mathbb{N} \end{cases}$$
 On définit la fonction f :

$$f(l) = \begin{cases} \rightarrow 0 \text{ si } l \text{ de la forme } [] & \text{c-à-d liste vide} \\ l \rightarrow 1 + f(l') \text{ si } l \text{ de la forme } e :: l' & \text{c-à-d liste construite par ajout de } e \text{ en tête de } l' \end{cases}$$
 Montrez que f calcule la longueur de toute liste l .
- On se propose de regarder un sens du lemme de Newmann. Une relation binaire $\rightarrow_R$ sur un ensemble E est dite :
 - Confluente* si pour tout $x, y, z \in E$, si $y \leftarrow_R^* x \rightarrow_R^* z$ alors il existe $v \in E$, $y \rightarrow_R^* v \leftarrow_R^* z$,
 - Localement confluente* si pour tout $x, y, z \in E$, si $y \leftarrow_R x \rightarrow_R z$ alors il existe $v \in E$, $y \rightarrow_R^* v \leftarrow_R^* z$.
 Montrez que si $\rightarrow_R$ est localement confluente et *bien fondée*, alors elle est confluente.

TD partie 2 – logique propositionnelle

Formules propositionnelles

1. Les expressions suivantes sont-elles des formules propositionnelles ? Si oui, précisez l'ordre d'application des opérateurs, si elles sont satisfiables ou valides.

- $a \vee b \wedge c \vee a$
- $a \vee \neg b \Rightarrow a$
- $a \Rightarrow \wedge b \Rightarrow \neg c$
- $a \neg \Rightarrow b$
- $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

2. Soient deux formules A et B , une variable propositionnelle p , une interprétation I .

Soit une interprétation I' définie par $I'(p) = I(B)$ et $I'(q) = I(q)$ pour $q \neq p$.

Montrez que $I'(A) = I(A[p := B])$.

3. Montrez qu'une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.

4. En utilisant les équivalences remarquables, montrez que $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B \Rightarrow C)$.

Modélisation, démonstrations sémantiques

5. *Georges aime la logique*. On considère les propositions suivantes :

- Georges, étudiant en L3 informatique, aime les langages formels ou la logique,
- Si Georges aime les langages formels, alors il aime la logique.
- a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
- b) Montrez que Georges aime la logique, avec une démonstration sémantique.

6. *Zoé va à Paris*. On considère les propositions suivantes :

- Si Alice et Julie vont à Paris, Zoé va aussi à Paris,
- Si Julie va à Paris, Alice va aussi à Paris,
- Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, va à Paris.
- a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
- b) Montrez que Zoé va à Paris, avec une démonstration sémantique.

7. *Frodon est triste*. On considère les propositions suivantes :

- Si Frodon ne va pas à Tatooine, Sauron prend le pouvoir,
- Si Sauron prend le pouvoir, Frodon est triste,
- Si Frodon va à Tatooine, il ne possède pas l'anneau,
- Si Frodon ne possède pas l'anneau, il est triste.
- a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
- b) Montrez que Frodon est triste, avec une démonstration sémantique.

8. *Gérard est déprimé*. On considère les propositions suivantes :

- Si Gérard, étudiant en L3 informatique, rate son examen, Gérard est déprimé,
- S'il fait beau, Gérard est à la piscine,
- Si Gérard est à la piscine, il ne travaille pas,
- Gérard rate son examen s'il ne travaille pas,
- Gérard sera déprimé s'il n'est pas à la piscine.
- a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
- b) Montrez que Gérard est déprimé, avec une démonstration sémantique.

Déduction naturelle

9. Montrez que les séquents suivants sont des séquents prouvables.

- $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- $\vdash \neg A \Leftrightarrow A \Rightarrow \perp$ (on rappelle que $A \Leftrightarrow B$ est une notation de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)
- $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$

10. *Loi de Peirce*. Montrez que la règle $\frac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A} (l.p.)$ est dérivable.

11. Montrez que la règle $\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ est dérivable.

12. *Tiers exclu*. Montrez que la règle $\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} (t.e.)$ est dérivable.

13. Montrez que *Georges aime la logique* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

14. Montrez que *Zoé va à Paris* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

15. Montrez que *Frodon est triste* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

16. Montrez que *Gérard est déprimé* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

Règles de la déduction naturelle (logique propositionnelle) :

$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} (ax)$	$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} (aff)$
$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} (\Rightarrow_i)$	$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$
$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^g)$	$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^d)$
$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$	
$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$
	$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge_e^i)$
$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg_i)$	$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$
	$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\perp_c)$

Résolution

17. Déterminez une FNC équivalente aux formules suivantes :

- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
- $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
- $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$

18. Combien faut-il de clauses pour représenter $((A \vee B \vee C \vee D \vee E) \wedge (F \vee G \vee H \vee I \vee J)) \Rightarrow (K \wedge L \wedge M \wedge N \wedge O)$?

19. Pour chaque formule F_i , déterminez F_i' tq la taille de F_i' est linéaire par rapport à la taille de F_i et F_i et F_i' équisatisfiables.

- $F_1 = a \vee \neg a$
- $F_2 = a \wedge b \wedge \neg a$

20. Prouvez par résolution les formules suivantes :

- $((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C))$
- $((A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D))$
- $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

Règles de résolution (logique propositionnelle) :

$\frac{C \vee p \quad C' \vee \neg p}{C \vee C'} (résolution)$	$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L} (factorisation)$
--	--

TD partie 3 – Logique du premier ordre

Syntaxe des formules du premier ordre

1. On considère le langage $\mathcal{L}_1$:

- Symboles de constantes : a, b
- Symboles de fonctions : $f : 2, g : 1$
- Symboles de relations : $P : 1, Q : 2$

On considère les expressions suivantes :

- (1) $g(f(x, y)) \vee P(a)$
- (2) $\exists x Q(a, y) \wedge P(f(a, b)) \Rightarrow P(x)$
- (3) $\forall x \exists y P(x) \wedge Q(f(y, b))$
- (4) $P(g(z)) \vee \forall x \exists z Q(a, y)$
- (5) $\exists x Q(f(x, y), g(z))$
- (6) $\forall y \forall x Q(x, y)$

- c) Ces expressions sont-elles des termes ? Des formules ? Ni l'un ni l'autre ?
- d) Donnez l'ensemble des variables libres de chaque formule.

Filtrage

2. On considère le langage $\mathcal{L}_2$:

- Symboles de constantes : *zéro*
- Symboles de fonctions : *succ* : 1, *add* : 2, *mult* : 2

On considère les motifs suivants :

- $m_1 = \text{mult}(x, \text{succ}(y))$
- $m_2 = \text{mult}(\text{plus}(x, y), \text{zéro})$
- $m_3 = \text{mult}(\text{plus}(x, y), x)$

Pour chacun des termes suivants, dites s'il correspond aux motifs ci-dessus, si oui donnez la substitution correspondante :

- a) $\text{mult}(\text{zéro}, \text{succ}(\text{zéro}))$
- b) $\text{mult}(u, v)$
- c) $\text{mult}(\text{plus}(\text{zéro}, \text{succ}(u)), \text{zéro})$
- d) $\text{mult}(\text{plus}(\text{zéro}, u), u)$

Modélisation

3. On considère le langage $\mathcal{L}_3$:

- Symboles de constantes : *titi, sylvestre, tom, jerry, spike*
- Symboles de relations : *souris* : 1, *canari* : 1, *chat* : 1, *chien* : 1, *chasse* : 2

Un prédateur est un protagoniste qui en chasse un autre, une proie est un protagoniste chassé par un autre.

Donnez des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous :

- c) Titi a un prédateur
- d) Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris
- e) Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry
- f) w est une proie mais pas un prédateur
- g) Tous les chats chassent Titi
- h) Si Titi est un canari, alors tous les chats chassent Titi
- i) w a un prédateur unique (on a besoin d'une relation d'égalité ici)
- j) w n'est chassé par personne
- k) Tous les chasseurs sont des proies
- l) Tous les chats sont chasseurs et proies
- m) Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes protagonistes

4. On considère le langage $\mathcal{L}_4$:

- Symboles de constantes : $true, false$
- Symboles de fonctions : $comp : 2$

On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_4$ dans un domaine D quelconque par :

- $I(comp) = e_1, e_2 \mapsto true$ si e_1 et e_2 sont égaux

Exprimez la correction et la complétude de la fonction $comp$.

5. On considère le langage $\mathcal{L}_5$:

- Symboles de constantes : $true, false$
- Symboles de fonctions : $mem : 2, cons : 2, concat : 2$

On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_5$ dans un domaine D quelconque par :

- $I(mem) = e, l \mapsto true$ si e appartient à la liste l
- $I(cons) = e, l \mapsto$ la liste l à laquelle on a ajouté e en tête
- $I(concat) = l_1, l_2 \mapsto$ la liste résultat de la concaténation de l_1 et l_2

Exprimez la correction et la complétude de la fonction mem . On utilisera le fait qu'un élément x est présent dans une liste si elle est le résultat de la concaténation d'une liste l et d'une liste l' qui commence par x .

6. On considère le langage $\mathcal{L}_6$:

- Symboles de constantes : Z
- Symboles de fonctions : $S : 1, plus : 2, mult : 2$

On choisit pour domaine d'interprétation $\mathbb{N}$ et l'interprétation usuelle des symboles de fonctions dans $\mathbb{N}$:

- $I(Z) = 0_{\mathbb{N}}$
- $I(S) = n \mapsto n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$
- $I(plus) = n_1, n_2 \mapsto n_1 +_{\mathbb{N}} n_2$
- $I(mult) = n_1, n_2 \mapsto n_1 \times_{\mathbb{N}} n_2$

Donnez des formules sur $\mathcal{L}_6$ exprimant :

- a) x est strictement plus petit que y
- b) x divise y
- c) x est premier
- d) x et y sont premiers entre eux

Déduction naturelle

7. *L'athlète idéal.* On considère les propositions suivantes :

- Tout athlète est fort
- Toute personne intelligente et forte réussira sa carrière
- Pierre est un athlète intelligent

- a) Modélisez ces propositions sous forme de formules du premier ordre
- b) Montrez que *Pierre réussira sa carrière*, en utilisant les règles de la déduction naturelle

8. Montrez que toute involution est bijective.

9. Montrez que toute relation symétrique et transitive et qui n'a pas d'élément maximal est réflexive.

Règles de la déduction naturelle (logique du premier ordre) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x A} (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma, \text{ ni dans } C}{\Gamma \vdash C} (\exists_e)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} (=_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} (=_e)$$

Évaluation de formules

10. On considère le langage $\mathcal{L}_{10}$:

- Symboles de constantes : Z
- Symboles de fonctions : $S : 1$, $plus : 2$, $mult : 2$

On choisit pour domaine d'interprétation un ensemble D de 10 places de parking en ligne.

On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_{10}$ dans ce domaine D par :

- $I(Z)$ = la place la plus à droite
- $I(S) = p \mapsto$ la place à droite de p ou p si pas de place à droite de p
- $I(plus) = p_1, p_2 \mapsto$ la place au milieu de p_1 et p_2 , en prenant celle de gauche si à cheval sur deux places
- $I(mult) = p_1, p_2 \mapsto$ la place au milieu de p_1 et p_2 , en prenant celle de droite si à cheval sur deux places

Une autre interprétation de ces formules sur $\mathcal{L}_{10}$ dans ce même domaine D peut être :

- $I'(Z)$ = la première place
- $I'(S) = p \mapsto p +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$
- $I'(plus) = p_1, p_2 \mapsto p_1 +_{\mathbb{N}} p_2$
- $I'(mult) = p_1, p_2 \mapsto p_1 \times_{\mathbb{N}} p_2$

Soit la formule $F = Plus(x, mult(Z, y))$, et la valuation v telle que $v(x) =$ la place la plus à gauche
et $v(y) =$ la 3^{ème} place en partant de la gauche.

- a) Quelle est l'évaluation de F avec la valuation v dans l'interprétation I ?
- b) Même question avec l'interprétation I'

11. Soit R un symbole de relation binaire, et soient les formules :

- (1) $\forall x \forall y \forall z \{ \neg R(x, x) \wedge [R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x)] \wedge [R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)] \}$
- (2) $\exists x \forall y R(x, y)$
- (3) $\exists x \forall y R(y, x)$
- (4) $\forall x \exists y \{ R(x, y) \wedge \forall z [R(x, z) \Rightarrow (z = y \vee R(y, z))] \}$
- (5) $\forall x \forall y \{ R(x, y) \Rightarrow \exists z [R(x, z) \wedge R(z, y)] \}$

Les formules sont-elles satisfaites dans les interprétations suivantes ?

- a) $D = \mathbb{N}$, R est interprétée par $<$
- b) $D = \mathbb{Z}$, R est interprétée par $<$
- c) $D = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$), R est interprétée par $\subsetneq$

Unification

12. Soient a un symbole de constante, f une fonction ternaire et g une fonction binaire.

Appliquez l'algorithme d'unification sur les termes suivants :

- a) $u = f(x, y, g(a, a))$ et $v = f(g(y, y), z, z)$
- b) $u = f(x, y, a)$ et $v = f(y, g(z, z), x)$
- c) $u = f(x, y, g(x, x))$ et $v = f(y, g(z, z), z)$

Résolution

13. Soient P et Q des symboles de relation unaires et R un symbole de relation binaire.

Prouvez par résolution les formules suivantes :

- a) $\exists x \forall y \forall z \{ (P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x)) \}$
- b) $\neg \exists x \forall y \{ (R(y, x) \Leftrightarrow \neg R(x, x)) \}$
- c) $\forall z \exists y \forall x \{ (R(x, y) \Leftrightarrow R(x, z) \wedge \neg R(x, x)) \} \Rightarrow \neg \exists x \forall y R(y, x)$

14. On souhaite calculer la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ en utilisant le principe de résolution.

On définit pour cela une relation $R_f(x_1, \dots, x_n, y)$ qui est vraie ssi $y = f(x_1, \dots, x_n)$, sous forme d'un ensemble de clauses C .

Pour calculer $f(t_1, \dots, t_n)$, pour des termes clos $t_1, \dots, t_n$, on applique la résolution à C , $\neg R_f(t_1, \dots, t_n, y)$.

C n'étant pas contradictoire, la résolution dérive $R_f(t_1, \dots, t_n, u)$ qui est une instance de $R_f(t_1, \dots, t_n, y)$. Par définition de R_f , on a alors $u = f(t_1, \dots, t_n)$.

- a) Donnez des clauses permettant de définir l'addition et la multiplication des entiers
- b) Donnez des clauses permettant de définir la concaténation et l'opération qui calcule le miroir des listes

Règles de résolution (logique du premier ordre) :

$\frac{C \vee L \quad C' \vee \neg L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee C'\sigma} \text{ (résolution)}$	$\frac{C \vee L \vee L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee L\sigma} \text{ (factorisation)}$
---	---