Exercices de TD – partie 1

Rappels maths – Ensembles inductifs

Rappels mathématiques

1. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture :
   a) $\mathbb{N}$ pour l'addition,
   b) $\mathbb{N}$ pour la soustraction,
   c) $\mathbb{Z}$ pour la soustraction,
   d) L'ensemble des entiers naturels impairs pour la multiplication,
   e) $\mathbb{Z}^-$ pour la soustraction,
   f) $\mathbb{Z}^-$ pour la multiplication,
   g) L'ensemble des intervalles fermés de $\mathbb{N}$ pour $\cup$,
   h) L'ensemble des intervalles fermés de $\mathbb{N}$ pour $\cap$.

2. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).
   - La fermeture réflexive transitive d'une relation R, notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
   - La fermeture transitive de R est notée R^*.

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation binaire $R = \{(a,a),(a,c),(a,d),(d,d),(d,e),(e,b),(e,e)\}$.

3. Soit un ensemble E. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation binaire R : $R(X,Y) \iff X\ et\ Y\ ont\ le\ même\ nombre\ d'éléments.$
Montrez que R est une relation d'équivalence.

4. Montrez les propriétés de cardinalité suivantes :
   a) $\mathbb{N} \setminus \{3,4,5\}$ est dénombrable,
   b) L'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable,
   c) $\mathbb{Q}^+$, l'ensemble des nombres rationnels positifs, est dénombrable.

Ensembles inductifs

5. Montrez par induction sur $\mathbb{N}$ que la somme des n premiers entiers est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.

6. Montrez par induction sur $\mathbb{N}$ que $n^4 - 4n^2$ est divisible par 3.

7. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini inductivement par les règles :

$$\begin{cases} & \to \quad (n,0) \qquad \text{c-à-d } (n,0) \in D \\ (n,n') & \to \quad (n,n+n') \qquad \text{c-à-d } (n,n+n') \in D \text{ si } (n,n') \in D \end{cases}$$

   a) Donnez quelques éléments de D,
   b) Montrez que pour deux entiers naturels n et n' on a $(n,n') \in D$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n' = kn$.

8. Soit V un ensemble de lettres. Donnez une définition inductive des palindromes sur V.

9. On définit inductivement l'ensemble X : $\varepsilon \in X$; si $u \in X$ alors $aub \in X$.
On pose $Y = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrez que $X = Y$. Par convention $a^0 = \varepsilon$.

10. On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des listes d'entiers défini inductivement par les règles :

$$\begin{cases} & \to \quad [\,] \qquad \text{c-à-d } [\,] \in \mathcal{L} \\ l & \to \quad e :: l, e \in \mathbb{N} \qquad \text{c-à-d } e :: l \in \mathcal{L} \text{ si } l \in \mathcal{L} \text{ pour } e \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit la fonction f :

$$f(l) = \begin{cases} & \to \quad 0\ si\ l\ de\ la\ forme\ [\,] \qquad \text{c-à-d liste vide} \\ l & \to \quad 1 + f(l')\ si\ l\ de\ la\ forme\ e :: l' \qquad \text{c-à-d liste construite par ajout de } e \text{ en tête de } l' \end{cases}$$

Montrez que f calcule la longueur de toute liste l.

11. On se propose de regarder un sens du lemme de Newmann. Une relation binaire $\to_R$ sur un ensemble E est dite :
   - *Confluente* si pour tout $x,y,z \in E$, si $y \ {}_R^*\!\!\leftarrow\ x \to_R^* z$ alors il existe $v \in E,\ y \to_R^* v \ {}_R^*\!\!\leftarrow\ z$,
   - *Localement confluente* si pour tout $x,y,z \in E$, si $y \leftarrow_R x \to_R z$ alors il existe $v \in E,\ y \to_R^* v \leftarrow_R^* z$.

Montrez que si $\to_R$ est localement confluente et *bien fondée*, alors elle est confluente.