Exercices de TD – partie 2

Logique propositionnelle

Formules propositionnelles

1. Les expressions suivantes sont-elles des formules propositionnelles ? Si oui, précisez l'ordre d'application des opérateurs, si elles sont satisfiables ou valides.

- $a \vee b \wedge c \vee a$,
- $a \vee \neg b \Rightarrow a$,
- $a \Rightarrow \wedge\, b \Rightarrow \neg c$,
- $a \neg\!\Rightarrow b$,
- $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

2. Soient deux formules A et B, une variable propositionnelle p, une interprétation I.
Soit une interprétation I' définie par $I'(p) = I(B)$ et $I'(q) = I(q)$ pour $q \neq p$.
Montrez que $I'(A) = I(A[p \coloneqq B])$.

3. Montrez qu'une formule A est valide si et seulement si $\neg A$ n'est pas satisfiable.

4. En utilisant les équivalences remarquables, montrez que $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B \Rightarrow C)$.

Modélisation, démonstrations sémantiques

5. *Georges aime la logique*. On considère les propositions suivantes :
   - Georges, étudiant en L3 informatique, aime les langages formels ou la logique,
   - Si Georges aime les langages formels, alors il aime la logique.

   a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
   b) Montrez que Georges aime la logique, avec une démonstration sémantique.

6. *Zoé va à Paris*. On considère les propositions suivantes :
   - Si Alice et Julie vont à Paris, Zoé va aussi à Paris,
   - Si Julie va à Paris, Alice va aussi à Paris,
   - Julie ou Zoé, l'une des deux au moins, va à Paris.

   a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
   b) Montrez que Zoé va à Paris, avec une démonstration sémantique.

7. *Frodon est triste*. On considère les propositions suivantes :
   - Si Frodon ne va pas à Tatooine, Sauron prend le pouvoir,
   - Si Sauron prend le pouvoir, Frodon est triste,
   - Si Frodon va à Tatooine, il ne possède pas l'anneau,
   - Si Frodon ne possède pas l'anneau, il est triste.

   a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
   b) Montrez que Frodon est triste, avec une démonstration sémantique.

8. *Gérard est déprimé*. On considère les propositions suivantes :
   - Si Gérard, étudiant en L3 informatique, rate son examen, Gérard est déprimé,
   - S'il fait beau, Gérard est à la piscine,
   - Si Gérard est à la piscine, il ne travaille pas,
   - Gérard rate son examen s'il ne travaille pas,
   - Gérard sera déprimé s'il n'est pas à la piscine.

   a) Modélisez ces propositions sous forme de formules propositionnelles,
   b) Montrez que Gérard est déprimé, avec une démonstration sémantique.

Déduction naturelle

9. Montrez que les séquents suivants sont des séquents prouvables.
   - $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
   - $\vdash \neg A \Leftrightarrow A \Rightarrow \bot$ (on rappelle que $A \Leftrightarrow B$ est une *notation* de $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)
   - $\vdash (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$

10. *Loi de Peirce*. Montrez que la règle $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}(l.p.)$ est dérivable.

11. Montrez que la règle $\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$ est dérivable.

12. *Tiers exclu*. Montrez que la règle $\dfrac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}(t.e.)$ est dérivable.

13. Montrez *que Georges aime la logique* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

14. Montrez que *Zoé va à Paris* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

15. Montrez que *Frodon est triste* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

16. Montrez que *Gérard est déprimé* en utilisant les règles de la déduction naturelle.

Règles de la déduction naturelle :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}(ax) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}(aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}(\Rightarrow_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}(\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}(\vee_i^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}(\vee_i^d) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}(\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}(\wedge_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}(\wedge_e^g) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}(\wedge_e^i)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}(\neg_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}(\neg_e) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\bot_c)$$

Résolution

17. Déterminez une FNC équivalente aux formules suivantes :
   - $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
   - $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
   - $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge \neg B)$

18. Combien faut-il de clauses pour représenter $((A \vee B \vee C \vee D \vee E) \wedge (F \vee G \vee H \vee I \vee J)) \Rightarrow (K \wedge L \wedge M \wedge N \wedge O)$?

19. Pour chaque formule F_i, déterminez F_i' tq la taille de F_i' est linéaire par rapport à la taille de F_i et F_i et F_i' équisatisfiables.
   - $F_1 = A \vee \neg A$
   - $F_2 = A \wedge B \wedge \neg A$

20. Prouvez par résolution les formules suivantes :
   - $((A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)) \Rightarrow (A \vee (B \Rightarrow C)$
   - $((A \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow D) \Rightarrow ((\neg A \vee B \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D))$
   - $((A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

Règles de résolution :

$$\frac{C \vee p \quad C' \vee \neg p}{C \vee C'}(résolution) \qquad \frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}(factorisation)$$