Exercices de TD – partie 3

Logique du premier ordre

Syntaxe des formules du premier ordre

1. On considère le langage $\mathcal{L}_1$:
   - Symboles de constantes : $a,\ b$
   - Symboles de fonctions : $f : 2,\ g : 1$
   - Symboles de relations : $P : 1,\ Q : 2$

On considère les expressions suivantes :

(1) $g(f(x,y)) \vee P(a)$
(2) $\exists x\ Q(a,y) \wedge P(f(a,b)) \Rightarrow P(x)$
(3) $\forall x\ \exists y\ P(x) \wedge Q(f(y,b))$
(4) $P(g(z)) \vee \forall x\ \exists z\ Q(a,y)$
(5) $\exists x\ Q(f(x,y), g(z))$
(6) $\forall y\ \forall x\ Q(x,y)$

a) Ces expressions sont-elles des termes ? Des formules ? Ni l'un ni l'autre ?
b) Donnez l'ensemble des variables libres de chaque formule.

Filtrage

2. On considère le langage $\mathcal{L}_2$:
   - Symboles de constantes : $zéro$
   - Symboles de fonctions : $succ : 1,\ add : 2,\ mult : 2$

On considère les motifs suivants :
- $m_1 = mult(x, succ(y))$
- $m_2 = mult(plus(x,y), zéro)$
- $m_3 = mult(plus(x,y), x)$

Pour chacun des termes suivants, dites s'il correspond aux motifs ci-dessus, si oui donnez la substitution correspondante :

a) $mult(zéro, succ(zéro))$
b) $mult(u,v)$
c) $mult(plus(zéro, succ(u)), zéro)$
d) $mult(plus(zéro,u), u)$

Modélisation

3. On considère le langage $\mathcal{L}_3$:
   - Symboles de constantes : $titi, sylvestre, tom, jerry, spike$
   - Symboles de relations : $souris : 1,\ canari : 1,\ chat : 1,\ chien : 1,\ chasse : 2$

Un prédateur est un protagoniste qui en chasse un autre, une proie est un protagoniste chassé par un autre.
Donnez des formules exprimant chacune des propriétés ci-dessous :

a) Titi a un prédateur
b) Les chats qui chassent les canaris ne chassent pas les souris
c) Spike est un prédateur d'un prédateur de Jerry
d) w est une proie mais pas un prédateur
e) Tous les chats chassent Titi
f) Si Titi est un canari, alors tous les chats chassent Titi
g) w a un prédateur unique (on a besoin d'une relation d'égalité ici)
h) w n'est chassé par personne
i) Tous les chasseurs sont des proies
j) Tous les chats sont chasseurs et proies
k) Sylvestre et Tom ne chassent pas les mêmes protagonistes

4. On considère le langage $\mathcal{L}_4$:
- Symboles de constantes : $true, false$
- Symboles de fonctions : $comp : 2$

On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_4$ dans un domaine D quelconque par :
- $I(comp) = e_1, e_2 \longmapsto true$ si e_1 et e_2 sont égaux

Exprimez la correction et la complétude de la fonction $comp$.

5. On considère le langage $\mathcal{L}_5$:
- Symboles de constantes : $true, false$
- Symboles de fonctions : $mem : 2,\ cons : 2,\ concat : 2$

On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_5$ dans un domaine D quelconque par :
- $I(mem) = e, l \longmapsto true$ si e appartient à la liste l
- $I(cons) = e, l \longmapsto$ la liste l à laquelle on a ajouté e en tête
- $I(concat) = l_1, l_2 \longmapsto$ la liste résultat de la concaténation de l_1 et l_2

Exprimez la correction et la complétude de la fonction mem. On utilisera le fait qu'un élément x est présent dans une liste si elle est le résultat de la concaténation d'une liste l et d'une liste l' qui commence par x.

6. On considère le langage $\mathcal{L}_6$:
- Symboles de constantes : Z
- Symboles de fonctions : $S : 1,\ plus : 2,\ mult : 2$

On choisit pour domaine d'interprétation ℕ et l'interprétation usuelle des symboles de fonctions dans ℕ :
- $I(Z) = 0_{\mathbb{N}}$
- $I(S) = n \longmapsto n +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$
- $I(plus) = n_1, n \longmapsto n_1 +_{\mathbb{N}} n_2$
- $I(mult) = n_1, n_2 \longmapsto n_1 \times_{\mathbb{N}} n_2$

Donnez des formules sur $\mathcal{L}_6$ exprimant :

a) x est strictement plus petit que y
b) x divise y
c) x est premier
d) x et y sont premiers entre eux

Déduction naturelle

7. *L'athlète idéal*. On considère les propositions suivantes :
- Tout athlète est fort
- Toute personne intelligente et forte réussira sa carrière
- Pierre est un athlète intelligent

a) Modélisez ces propositions sous forme de formules du premier ordre
b) Montrez que *Pierre réussira sa carrière*, en utilisant les règles de la déduction naturelle

8. Montrez que toute involution est bijective.

9. Montrez que toute relation symétrique et transitive et qui n'a pas d'élément maximal est réflexive.

Règles de la déduction naturelle (premier ordre) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x\, A}(\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}(\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}(\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\, A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma, \text{ ni dans } C}{\Gamma \vdash C}(\exists_e)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}(=_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]}(=_e)$$

Évaluation de formules

10. On considère le langage $\mathcal{L}_{10}$:
- Symboles de constantes : Z
- Symboles de fonctions : $S : 1,\ plus : 2,\ mult : 2$

On choisit pour domaine d'interprétation un ensemble D de 10 places de parking en ligne.
On peut interpréter les formules sur $\mathcal{L}_{10}$ dans ce domaine D par :
- $I(Z)$ = la place la plus à droite
- $I(S) = p \longmapsto$ la place à droite de p ou p si pas de place à droite de p
- $I(plus) = p_1, p_2 \longmapsto$ la place au milieu de p_1 et p_2, en prenant celle de gauche si à cheval sur deux places
- $I(mult) = p_1, p_2 \longmapsto$ la place au milieu de p_1 et p_2, en prenant celle de droite si à cheval sur deux places

Une autre interprétation de ces formules sur $\mathcal{L}_{10}$ dans ce même domaine D peut être :
- $I'(Z)$ = la première place
- $I'(S) = p \longmapsto p +_{\mathbb{N}} 1_{\mathbb{N}}$
- $I'(plus) = p_1, p_2 \longmapsto p_1 +_{\mathbb{N}} p_2$
- $I'(mult) = p_1, p_2 \longmapsto p_1 \times_{\mathbb{N}} p_2$

Soit la formule $F = Plus(x, mult(Z, y))$, et la valuation v telle que $v(x)$ = la place la plus à gauche
et $v(y)$ = la $3^{\text{ème}}$ place en partant de la gauche.

a) Quelle est l'évaluation de F avec la valuation v dans l'interprétation I ?
b) Même question avec l'interprétation I'

11. Soit R un symbole de relation binaire, et soient les formules :
(1) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \{\neg R(x,x) \wedge [R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)] \wedge [R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)]\}$
(2) $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$
(3) $\exists x\, \forall y\, R(y,x)$
(4) $\forall x\, \exists y\, \{R(x,y) \wedge \forall z\, [R(x,z) \Rightarrow (z = y \vee R(y,z))]\}$
(5) $\forall x\, \forall y\, \{R(x,y) \Rightarrow \exists z\, [R(x,z) \wedge R(z,y)]\}$

Les formules sont-elles satisfaites dans les interprétations suivantes ?
a) $D = \mathbb{N}$, R est interprétée par $<$
b) $D = \mathbb{Z}$, R est interprétée par $<$
c) $D = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$), R est interprétée par $\subsetneq$

Unification

12. Soient a un symbole de constante, f une fonction ternaire et g une fonction binaire.
Appliquez l'algorithme d'unification sur les termes suivants :
a) $u = f(x, y, g(a, a))$ et $v = f(g(y, y), z, z)$
b) $u = f(x, y, a)$ et $v = f(y, g(z, z), x)$
c) $u = f(x, y, g(x, x))$ et $v = f(y, g(z, z), z)$

Résolution

13. Soient P et Q des symboles de relation unaires et R un symbole de relation binaire.
Prouvez par résolution les formules suivantes :
a) $\exists x\, \forall y\, \forall z\, \{(P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x))\}$
b) $\neg \exists x\, \forall y\, \{(R(y,x) \Leftrightarrow \neg R(x,x))\}$
c) $\forall z\, \exists y\, \forall x\, \{(R(x,y) \Leftrightarrow R(x,z) \wedge \neg R(x,x))\} \Rightarrow \neg \exists x\, \forall y\, R(y,x)$

14. On souhaite calculer la fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ en utilisant le principe de résolution.
On définit pour cela une relation $R_f(x_1, \dots, x_n, y)$ qui est vraie ssi $y = f(x_1, \dots, x_n)$, sous forme d'un ensemble de clauses C.
Pour calculer $f(t_1, \dots, t_n)$, pour des termes clos $t_1, \dots t_n$, on applique la résolution à $C,\ \neg R_f(t_1, \dots, t_n, y)$.
C n'étant pas contradictoire, la résolution dérive $R_f(t_1, \dots, t_n, u)$ qui est une instance de $R_f(t_1, \dots, t_n, y)$. Par définition de R_f, on a alors $u = f(t_1, \dots, t_n)$.
a) Donnez des clauses permettant de définir l'addition et la multiplication des entiers
b) Donnez des clauses permettant de définir la concaténation et l'opération qui calcule le miroir des listes

Règles de résolution :

$$\frac{C \vee L \quad C' \vee \neg L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee C'\sigma}(résolution) \qquad \frac{C \vee L \vee L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee L\sigma}(factorisation)$$