ARCHI – Architecture des ordinateurs
Sylvain Brandel
2024 – 2025
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 2

LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

Logique propositionnelle
Pourquoi ?

- Niveau matériel = modèle logique
- Niveau programme : preuve de propriété = logique
- Niveau applicatif, BD : vérification de propriétés = logique
- …

- Plus généralement
  - Criticité : sécurité, sureté …
  - Financier
  - Pas d'ambiguïté

Logique propositionnelle
Syntaxe

- $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \ \dots\}$ un ensemble infini de variables propositionnelles

- Ensemble $\mathcal{F}$ des formules du calcul propositionnel : ensemble inductif
  - x variable propositionnelle alors $x \in \mathcal{F}$
  - $\perp \in \mathcal{F}$
  - Si $A \in \mathcal{F}$ alors $\neg A \in \mathcal{F}$
  - Si $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $A \vee B \in \mathcal{F}$, $A \wedge B \in \mathcal{F}$, $A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

- Notation : $A \Leftrightarrow B$: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

- Priorités : $\neg \quad > \quad \wedge \quad > \quad \vee \quad > \quad \Rightarrow$

- Associativité : à gauche pour $\wedge$ et $\vee$, à droite pour $\Rightarrow$

- Ex : $p \vee q \Rightarrow r$

Logique propositionnelle
Sémantique

- Sens des formules → interprétation dans l'algèbre de Boole

- Interprétation du calcul propositionnel : fonction $I : V \rightarrow \mathbb{B}$
  - $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \ \dots\}$: variables
  - $\mathbb{B} = \{0,1\}$

- I étendue à $\mathcal{F}$
  - Cas des variables déjà traité
  - $I(\perp) = 0$
  - $A \in \mathcal{F}$ alors $I(\neg A) = \overline{I(A)}$
  - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \vee B) = I(A) + I(B)$
  - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \wedge B) = I(A) \,.\, I(B)$
  - $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$ alors $I(A \Rightarrow B) = I(A) \ \dot{\Rightarrow}\ I(B)$

Seule vérité autorisée

Algèbre de Boole

- George Boole 1815 – 1864 (Royaume-Uni)
- Booléens : oui, non ; 0, 1 ; haut, bas ; rouge, noir ; etc.
- Relation d'ordre : 0 < 1
- Soit $\mathbb{B} = \{0,1\}$. Opérations :
  - $\bar{\ } : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ complément
  - $+ : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ ∪, ou, disjonction, max
  - $. : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ ∩, et, conjonction, min
  - $\dot{\Rightarrow} : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ si … alors, implication

Algèbre de Boole

x	y	$x\,.\,y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \dot{\Rightarrow} y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Algèbre de Boole

- 0 : minimum, 1 maximum

- $x \,.\, 1 = x \qquad x \,.\, 0 = 0$
- $x + 0 = x \qquad x + 1 = 1$

- Complément : $x \,.\, \bar{x} = 0 \qquad x + \bar{x} = 1$

- Commutativité
- Associativité
- Distributivité

- De Morgan :
  - $\bar{x} \,.\, \bar{y} = \overline{x + y}$
  - $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \,.\, y}$

Algèbre de Boole
Tables de vérité

- Idée : notation par extension

- Une ligne par valeurs possible des variables
- Présentation des sous-fonctions en colonnes

- Fonctions booléennes : par extension, une fonction par table de vérité
  → combien ?

Interprétations

- Interprétation : fonction $I : V \rightarrow \mathbb{B}$

- Soit A une formule.

  $I(A) = 1$: I satisfait A noté $I \vDash A$

- Ex :
  - Si $I(p) = 0$ et $I(q) = 0$ et $I(r) = 0$ alors $I \vDash p \lor q \Rightarrow r$
  - Si $I(p) = 1$ et $I(q) = 1$ et $I(r) = 0$ alors I ne satisfait pas $p \lor q \Rightarrow r$

- Soit F un ensemble de formules.

  Si $I \vDash A$ pour tout $\mathrm{A} \in F$: I satisfait F noté $I \vDash F$

- Ex :
  - Si $I(p) = 1$ alors $I \vDash \{ p \lor q, \neg p \Rightarrow r\}$
  - Si $I(p) = 1$ alors I ne satisfait pas $\{ p \lor q, \neg p\}$

Interprétations

- A tautologie, ou A valide noté $\vDash A$

  si pour toute interprétation I, $I \vDash A$

- F contradictoire, ou F non satisfiable

  s'il n'existe aucune interprétation I telle que $I \vDash F$

- F satisfiable

  s'il existe une (au moins) interprétation I telle que $I \vDash F$

- F déduit sémantiquement A noté $F \vDash A$

  si toute interprétation satisfaisant F satisfait aussi A

- A et B sémantiquement équivalentes noté $A \equiv B$

  si $\{ A \} \vDash B$ et $\{ B \} \vDash A$

Logique propositionnelle
Modélisation

- Un logicien écoute un étudiant énumérer ses ressentis à propos des cours qu'il suit :
  - « J'aime la logique ou j'aime l'informatique, »
  - « Si j'aime l'informatique alors j'aime la logique. »
- Le logicien en déduit que l'étudiant aime la logique. Pourquoi ?

- Soient a et b deux variables propositionnelles :
  - a représente « j'aime la logique »
  - b représente « j'aime l'informatique »
- Les deux phrases de l'étudiant représentées par :
  1. $a \vee b$
  2. $b \Rightarrow a$
- Déduction du logicien représentée par a
- Démontrer $a \vee b, b \Rightarrow a \vDash a$

Logique propositionnelle
Remplacements

- Remplacement d'une variable p par une formule B dans une formule A, noté $A[p \coloneqq B]$, défini par induction sur A :
  - $p[p \coloneqq B] = B$
  - q$[p \coloneqq B] = q$ si $q \neq p$
  - $\bot\ [p \coloneqq B] = \bot$
  - $\neg A[p \coloneqq B] = \neg(A[p \coloneqq B])$
  - $(A_1 \vee A_2)[p \coloneqq B] = (A_1[p \coloneqq B]) \vee (A_2[p \coloneqq B])$
  - $(A_1 \wedge A_2)[p \coloneqq B] = (A_1[p \coloneqq B]) \wedge (A_2[p \coloneqq B])$
  - $(A_1 \Rightarrow A_2)[p \coloneqq B] = (A_1[p \coloneqq B]) \Rightarrow (A_2[p \coloneqq B])$
- Ex : $(p \wedge q \Rightarrow q)[q \coloneqq r \vee s] = ?$

Logique propositionnelle

Propositions

- Proposition 1. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, F ensemble de formules.
  - $F \vDash A \Rightarrow B$ si et seulement si $F, A \ \vDash B,$
  - $F \vDash A$ si et seulement si $F, \neg A$ contradictoire.

- Proposition 2. $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}$, p une variable, I une interprétation.

  I' définie par $I'(p) = I(B)$ et $I'(q) = I(q)\ si\ q \neq p$

  On a $I(A[p \coloneqq B]) = I'(A)$

- Proposition 3. A, A', B, B' des formules, p une variable.
  - Si $\vDash A$ alors $\vDash A[p \coloneqq B]$
  - Si $A \ \equiv A'$ alors $A[p \coloneqq B] \equiv A'[p \coloneqq B]$
  - Si $B \equiv B'$ alors $A[p \coloneqq B] \equiv A\ [p \coloneqq B']$

Logique propositionnelle
Quelques équivalences

$A \wedge A \equiv A$

$A \vee A \equiv A$

$A \wedge B \equiv B \wedge A$

$A \vee B \equiv B \vee A$

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

$\bot \wedge A \equiv \bot$

$\bot \vee A \equiv A$

$\neg\neg A \equiv A$

Logique propositionnelle
Forme Clausale

- Littéral :

  variable ou négation de variable

- Clause :

  disjonction de littéraux (éventuellement un seul)

- FNC (Forme Normale Conjonctive) :

  conjonction de disjonction de littéraux (clauses)

  (éventuellement une seule)

- FND (Forme Normale Disjonctive) :

  disjonction de conjonctions de littéraux

  (éventuellement une seule)

Logique propositionnelle

Forme Clausale

- Proposition 4 : pour toute formule $A \in \mathcal{F}$
  on a une formule $A' \in \mathcal{F}$ et une formule $A'' \in \mathcal{F}$ telles que
  - $A \equiv A' \equiv A''$
  - A' est en FNC
  - A'' est en FND

Algèbre de Boole

- Tables de vérité

- Ex (binaire) :

	x	y	S
m_0	0	0	0
m_1	0	1	1
m_2	1	0	1
m_3	1	1	0

- Termes produits : distinction de lignes

- m_i : ligne i parmi n

Algèbre de Boole

- Terme produit : intersection des variables d'entrée,
  complémentées si valeur 0
  non complémentées si valeur 1

- Expression de S : $m_0.S_0 + m_1.S_1 + m_2.S_2 + m_3.S_3$ $\sum_i (m_i.S_i)$
  - Un seul m_i non 0
  - $1 . S_i = S_i$
  - $m_i . 1 = m_i$
  - $x + 0 = x$

  → Forme canonique : Forme Normale Disjonctive

  Union des termes produits pour lesquels la fonction vaut 1

- Notation $\sum m\,(liste\ des\ termes\ produits\ pertinents)$

Algèbre de Boole

- Forme Normale Disjonctive

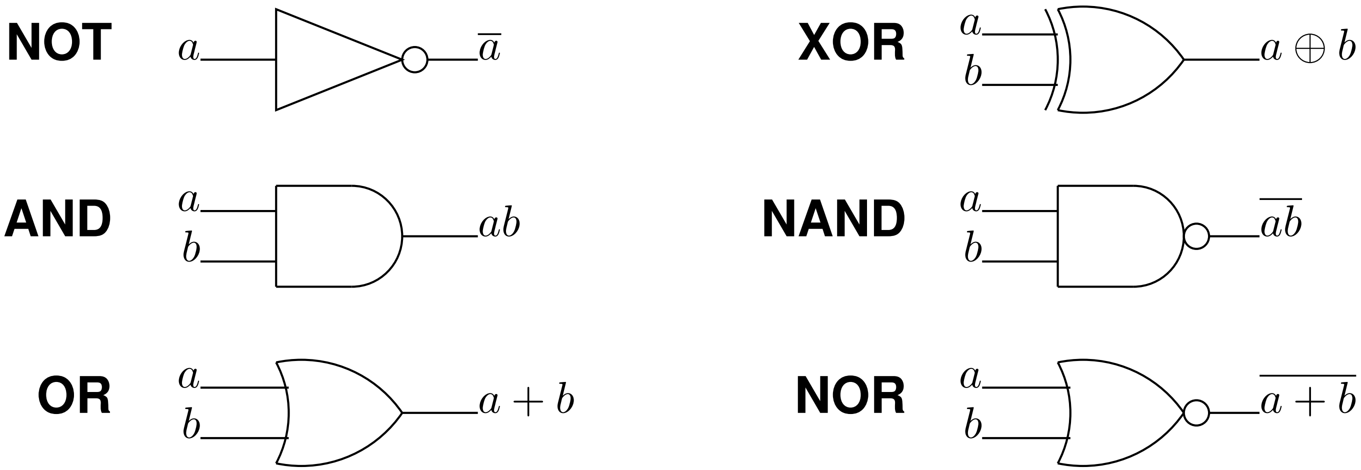
- Toutes fonctions booléennes exprimables avec et, ou, non

- De plus :
  - $\overline{x.1} = \bar{x}$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = \overline{x.x}$
  - $\overline{1.\overline{x.y}} = x.y$ $\qquad\qquad$ $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{\overline{x.y}.\overline{x.y}}$
  - $\overline{\overline{1.x}.\overline{1.y}} = x + y$ $\qquad\qquad$ $x + y = \bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \overline{\overline{x.x}.\overline{y.y}}$
- Toutes fonctions booléennes exprimables avec non-et (ou non-ou)

- Ex : DNF → NAND-NAND

Algèbre de Boole

- Notation :



- Ex : XOR avec 5 portes simples (AND, OR, NOT)

- Ex : XOR avec 4 portes simples