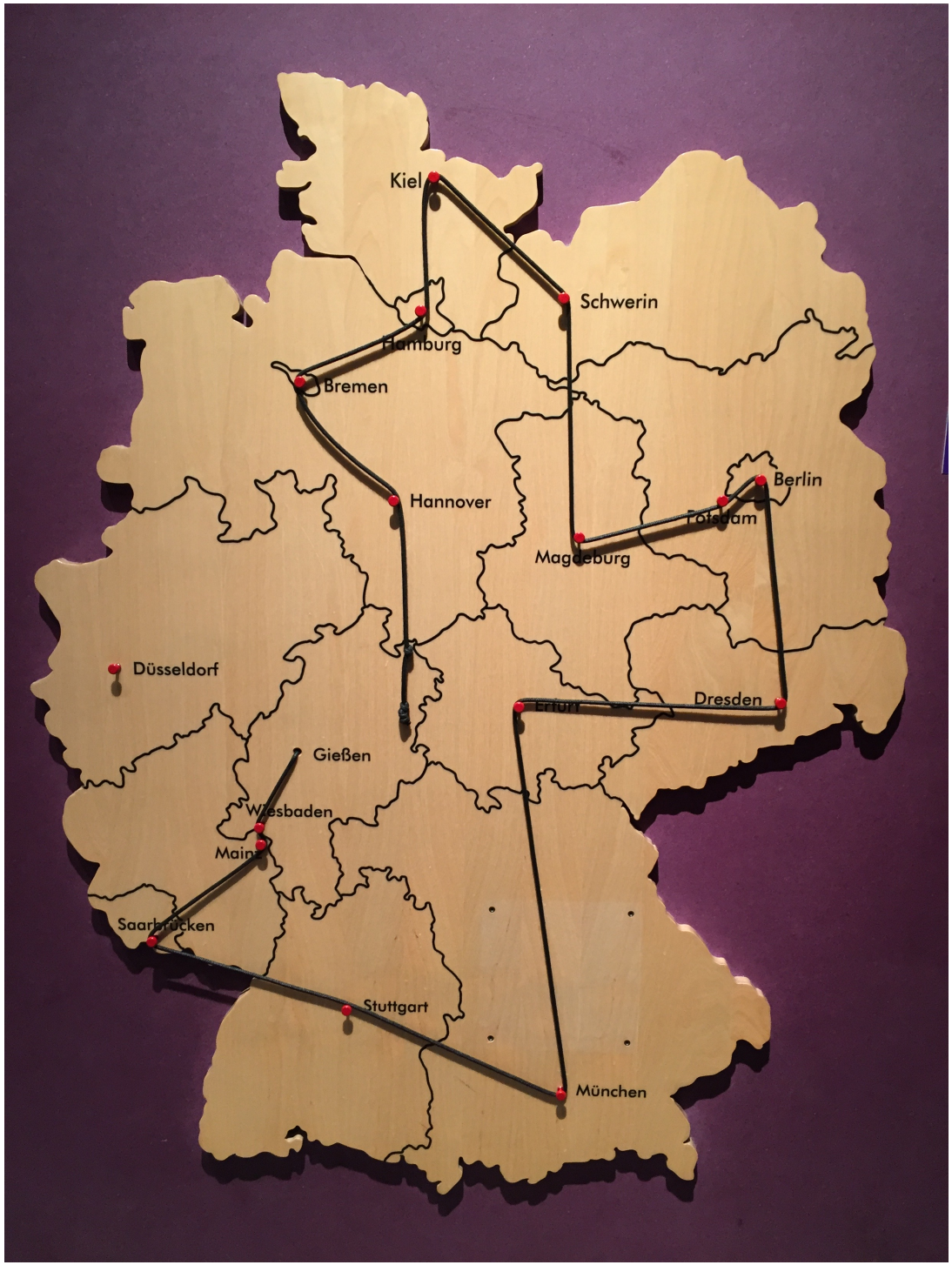
M1if09 – Modèles de calcul & complexité
(ex calculabilité & complexité)

Sylvain Brandel
2022 – 2023
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

COMPLEXITÉ
CLASSES P ET NP


Kiel
Schwerin
Hamburg
Bremen
Hannover
Berlin
Potsdam
Magdeburg
Düsseldorf
Dresden
Erfurt
Gießen
Wiesbaden
Mainz
Saarbrücken
Stuttgart
München

La classe P

- Exemple 1 : voyageur de commerce

  Visite de *n* villes en faisant le moins de km possibles.

  Algorithme ?

  produire toutes les permutations de villes possibles (sauf la première qui est toujours la même),

  pour chaque permutation, calculer le trajet.

  $\rightarrow (n - 1)$! permutations possibles.

La classe P

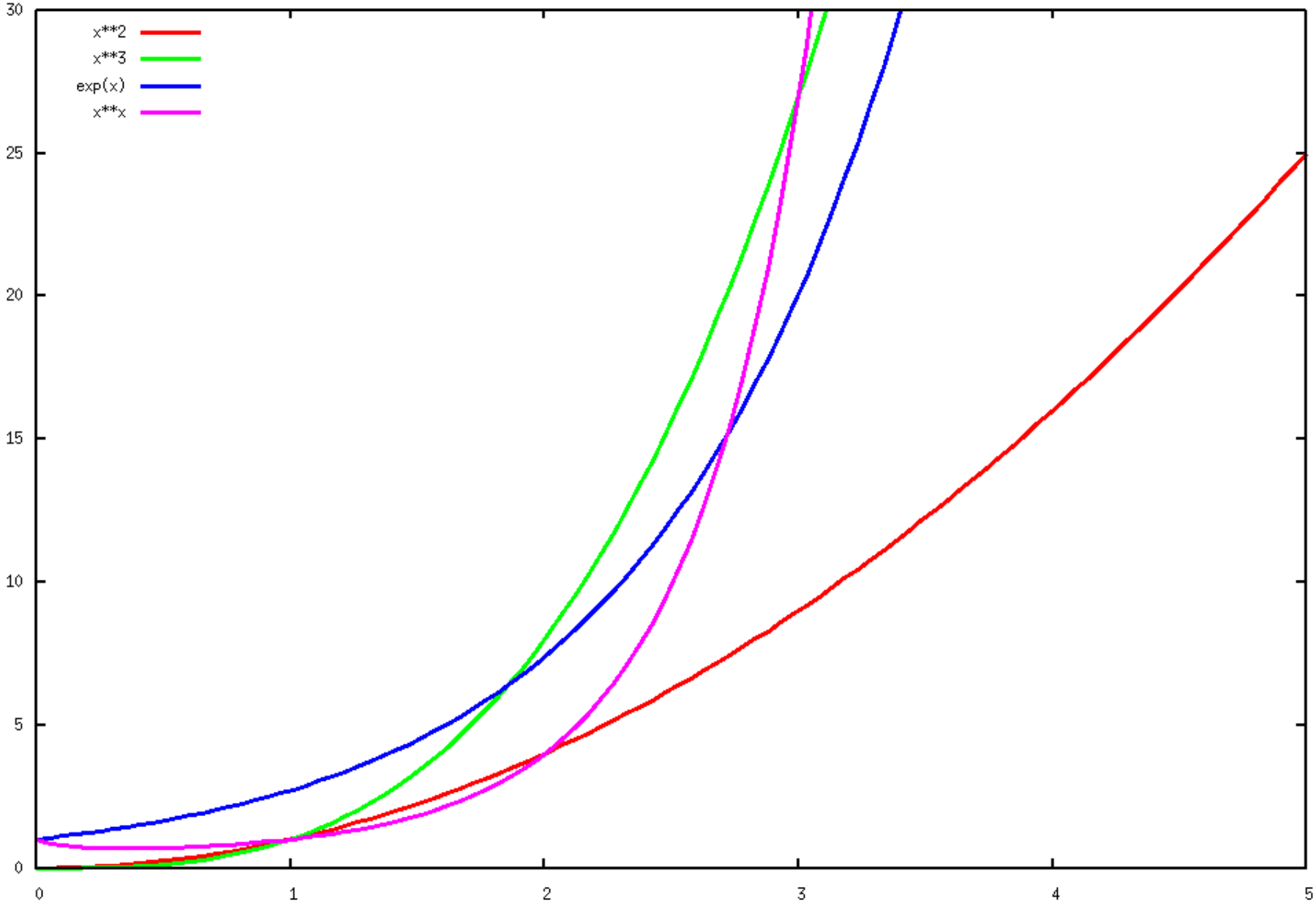
- Ex. 2 : géométrie tortue

```
void triangles1(float x, float y, float d, float h) {
  if (y+d < h) {
    tracer(x-d,y+d);
    triangles1(x-d,y+d,d,h);
    tracer(x+d,y+d);
    triangles1(x+d,y+d,d,h);
    tracer(x,y);
  }
}
```

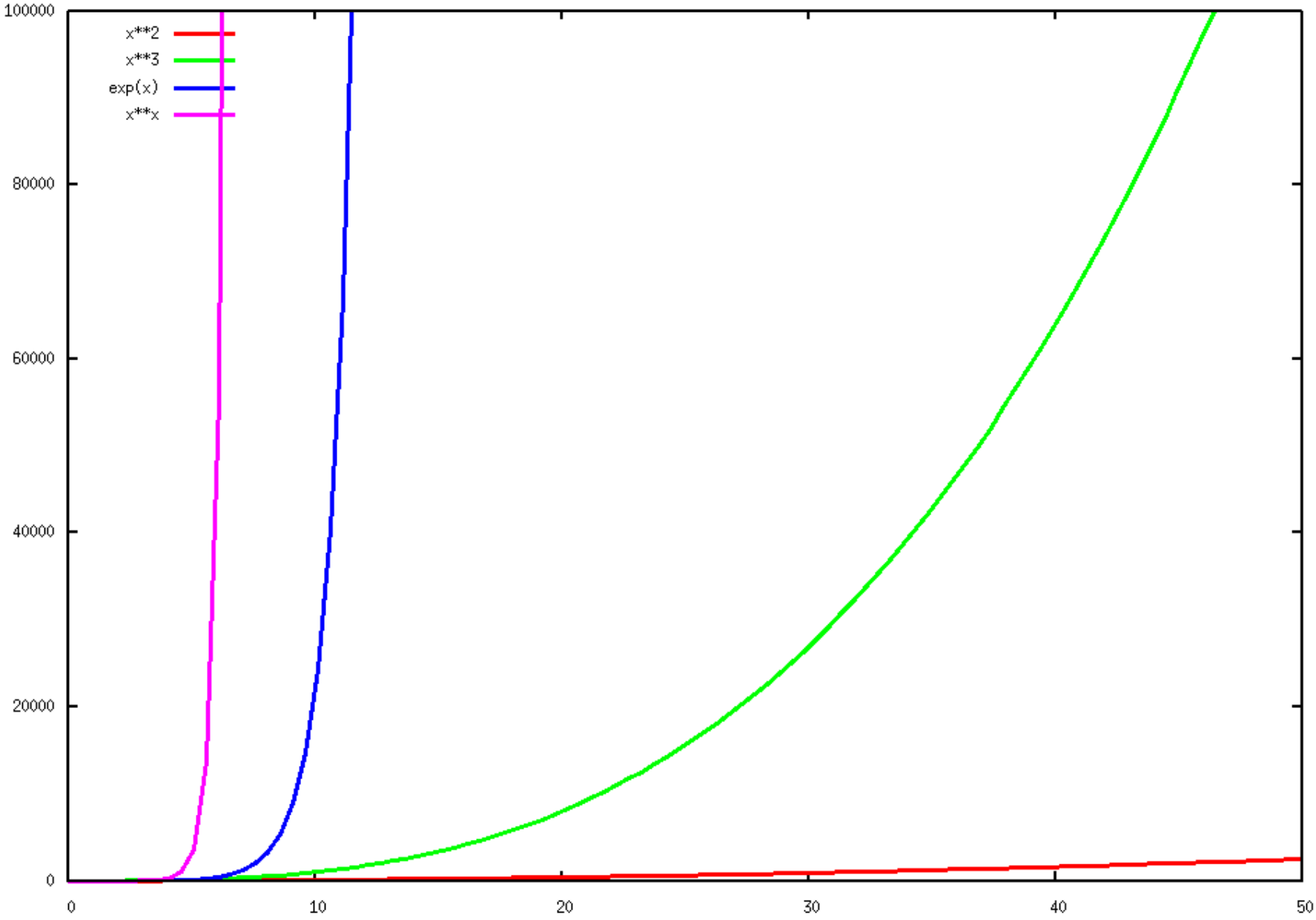
appel avec :

```
placer(x,y); triangles1(x,y,d,h);
```

La classe P



La classe P



Machine de Turing

- Machine de Turing standard : quintuplet M = (K, Σ, Γ, δ, q_0)
  - K : ensemble fini d'états
  - Σ : alphabet d'entrée
  - Γ : alphabet des symboles du ruban
  - δ : fonction de transition

    fonction partielle $K \times \Gamma \longrightarrow K \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, S\}$,

    les symboles ← et → désignent un déplacement élémentaire à gauche ou à droite, S pour Stay
  - $q_0 \in K$ est l'état initial.
- Machine de Turing non déterministe : sextuplet M = (K, Σ, Γ, Δ, q_0, F)
  - Δ : relation de transition $\Delta \subset K \times \Gamma \times K \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, S\}$
  - $F \subset K$: états acceptants

  → Plusieurs sorties différentes pour la même entrée

  → Accepteur dont le seul résultat qui nous intéresse est de savoir si la machine s'arrête ou non

La classe P

- Définition

  Une machine de Turing déterministe $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ est dite polynomialement bornée s'il existe un polynôme p tel que pour toute entrée w, il n'y a pas de configuration C telle que

  $$(q_0, \underline{\#}w) \vdash_M^{p(|w|+1)} C$$

  c'est-à-dire M s'arrête toujours, et ce, en au plus p(|w|+1) étapes

  Un langage est dit polynomialement décidable ssi il existe une machine de Turing polynomialement bornée qui le décide

- La classe des langages polynomialement décidables est notée P

Thèse de Church – Turing

- *Un algorithme est une machine de Turing qui s'arrête pour toutes ses entrées*
- *We therefore propose to adapt the Turing machine that halts on all inputs as the precise formal notion corresponding to the intuitive notion of an "algorithm"*
- *Les langages reconnus par une procédure effective sont ceux décidés par une machine de Turing*
- *Every computational process that is intuitively considered to be an algorithm can be converted to a Turing machine*

La classe P

- La thèse de Church-Turing est raffinée en :

  Les machines de Turing polynomialement bornées et la classe P correspondent aux notions

  - D'algorithmes pratiquement exécutables
  - Et de problèmes réellement solvables

- Théorème

  La classe P est stable par complément

- Théorème

  Il existe des langages récursifs non polynomialement décidables

Exemples de problèmes et de complexité

- Exemple 1 : existence d'un chemin

  Soient un graphe orienté $G \subset V \times V$ ($V = \{v_1, \ldots, v_n\}$)
  et deux sommets v_i et $v_j \in V$

  Existe-t-il un chemin entre v_i et v_j ?

  $\Rightarrow$ Il existe un algorithme en $O(n^3)$:

  calcul de la fermeture réflexive – transitive

Exemples de problèmes et de complexité

- Exemple 2 : graphes Eulériens

  Soit un graphe G.

  Existe-t-il un chemin fermé (cycle) dans G qui utilise chaque arête une fois et une seule ?

  Un graphe qui contient un tel cycle est dit Eulérien ou unicursal

  Le problème du cycle Eulérien $\in$ P

Exemples de problèmes et de complexité

- Exemple 3 : graphes Hamiltoniens

  Soit un graphe G

  Existe-t-il un cycle passant par chaque sommet une fois et une seule ?

  Un graphe qui contient un tel cycle est dit Hamiltonien

Algorithme :

- Examiner toutes les permutations de nœuds possibles
  ($\rightarrow$ exponentiel)
- Regarder si le parcours correspondant existe dans G

Le problème des cycles Hamiltoniens n'est pas connu comme étant dans P

Classe NP

- Définition

  Une machine de Turing non déterministe M = (K, Σ, Γ, Δ, q_0, F) est dite polynomialement bornée s'il existe un polynôme p tel que :

  pour toute entrée w, il n'y a pas de configuration C telle que

  $$(q_0, \underline{\#}w) \vdash_M^{p(|w|+1)} C$$

  c'est-à-dire M s'arrête toujours, et ce, en au plus p(|w|+1) étapes.

- NP est la classe des langages décidés par une machine de Turing non déterministe polynomialement bornée

NP pour *Non déterministe Polynomial*

Classe NP

- Rappel : Logique d'ordre 0 – calcul des propositions :
  - Variables booléennes
  - Connecteurs (opérations) : $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ et $\neg$
  - Un littéral est une expression de la forme p ou $\neg$p pour une variable propositionnelle p
  - Une clause est une disjonction de variables propositionnelles ou de leur négation :

    E = $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ (chaque x_i est un littéral)
  - Forme normale conjonctive

    F = $E_1 \wedge E_2 \wedge \ldots \wedge E_n$ (chaque E_i est une clause)

    = $\wedge_{i=1}^{n} (\vee_{ji=1}^{Pi} x_{ji})$ avec $x_{ji} = a_{ji}$ ou $\neg a_{ji}$ (atomes, littéraux positifs ou négatifs = clauses)
  - Assignation booléenne ou interprétation :
    - fonction : X $\rightarrow$ (T,$\perp$) X : ensemble des variables

      T : vrai, $\perp$: faux
  - Satisfiabilité : $\exists$ (au moins) une interprétation rendant la formule vraie

Classe NP

- Enoncé du problème SAT

  Soit une forme normale conjonctive F
  F est-elle satisfiable ?

- Proposition

  Le problème SAT est dans NP

Classe NP

- Algorithme brutal pour le problème SAT
  - Faire une table de vérité

    $\rightarrow$ exponentiel en fonction du nombre de variables.
  - Pour chaque assignation, tester la FNC (linéaire)

    ➔ exponentiel

- 2-SAT (au plus 2 littéraux par clause) : $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge e \wedge \ldots$
  - 2-SAT $\in$ P (algorithme P connu, même si table de vérité de taille exponnentielle)

- 3-SAT (exactement 3 littéraux par clause : $(a \vee b \vee c) \wedge (d \vee e \vee f) \wedge \ldots$
  - 3-SAT $\in$ NP (pas d'algorithme P connu, algorithme NP connu)

- SAT (FNC avec clauses avec nombre quelconque de littéraux)
  - SAT $\in$ NP

Classe NP

- Voyageur de commerce (faible)

  Soient un entier $n \geq 2$, une matrice de distance d_{ij} et un entier $B \geq 0$.

  (B est le budget du voyageur de commerce)

  Le problème consiste à trouver une permutation π sur {1, 2, …, n} telle que $C(\pi) \leq B$, où :

  $$C(\pi) = d_{\pi(1)\,\pi(2)} + d_{\pi(2)\,\pi(3)} + \ldots + d_{\pi(n-1)\,\pi(n)} + d_{\pi(n)\,\pi(1)}$$

- Proposition

  Le problème du voyageur de commerce est dans NP

Classe NP

- De manière semblable, des algorithmes de type :
  - Générer de manière non déterministe une situation
  - Tester de manière déterministe cette situation

Peuvent résoudre des problèmes précédents avec des machines de Turing ND polynomialement bornées

- Si le test de la situation se fait avec une machine de Turing (déterministe) polynomialement bornée
- Et si la taille de la situation est bornée polynomialement en fonction des entrées

Classe NP

- 2-SAT $\in$ P, 3-SAT $\in$ NP

  $\Rightarrow$ SAT $\in$ NP

  ce qui ne veut pas dire que SAT $\notin$ P…

- P $\subseteq$ NP (clair)
- NP $\subseteq$ P ? Cela voudrait dire :
  1) Qu'il existe une MT polynomialement bornée équivalente à une MT ND polynomialement bornée
  2) Que les problèmes SAT, voyageur de commerce, cycle de Hamilton, etc. seraient dans P

- En fait, on ne sait pas si NP $\subseteq$ P (et donc P = NP).

Classe NP

- Définition (borne exponentielle)

  Une MT M = (K, $\sum$, Γ, δ, q_0, F) est dite exponentiellement bornée s'il existe un polynôme p tel que :

  pour toute entrée w, il n'y a pas de configuration C telle que

  $$(q_0, \#w) \vdash_M^{2^{p(|w|)}+1} C$$

  Cette machine s'arrête toujours, et ce en au plus $2^{p(|w|)}+1$ étapes

- On note EXP la classe des langages qui peuvent être décidés par une MT exponentiellement bornée

- Théorème

  Si L $\in$ NP, alors L $\in$ EXP

  Autrement dit : NP $\subseteq$ EXP

Classe NP

Certificat

- MT non dét. polynom. bornée : résolution de problèmes d'existence
  - Production d'une situation
  - Test
    - Réussite → problème d'existence résolu
    - Échec à tous → problème d'existence résolu (réponse négative)

- Certificat (témoin) :
  - Mot synthétisant une solution et passant le test avec succès
  - Tous les problèmes NP ont des certificats
  - Seuls les problèmes NP ont des certificats
  - En pratique
    - Longueur des certificats polynomiale par rapport aux entrées
    - Test des certificats en temps polynomial

Classe NP

Certificat

- Définition

  Soient Σ un alphabet et ";" un symbole $\notin \Sigma$

  Soit L' un langage tel que L' $\subseteq \Sigma^*$; Σ^*

  On dit que L' est polynomialement équilibré s'il existe un polynôme p tel que

  si x ; y $\in$ L' alors $|y| \leq p(|x|)$

- Théorème

  Soit L $\subseteq \Sigma^*$ un langage et Σ un alphabet pour lequel ; $\notin \Sigma$ et $|\Sigma| \geq 2$.

  L $\in$ NP ssi il existe un langage polynomialement équilibré L' $\subseteq \Sigma^*$; Σ^* tel que :

  L' $\in$ P et L = {x | $\exists$ y $\in \Sigma^*$: x ; y $\in$ L'}

  - L' = { x ; y | y est un certificat pour x }
  - Si x ∈ L, alors il y a au moins un certificat
    - Si L' existe, alors une MT non dét. décide L en testant tous les certificats, en utilisant une MT dét. décidant L', donc L ∈ NP
    - Si L ∈ NP, alors il existe une MT non dét. polynomialement bornée décidant L

- Exemple
  - L : SAT ; L' : une interprétation validant chaque instance positive
  - L : 3-COL ; L' : un coloriage pour chaque graphe 3-coloriable
  - L : ensemble des nombre composites ; L' : la paire d'entiers composant chaque nombre