

TD1 – Ensembles et relations

1. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture.

- \mathbf{N} pour l'addition.
- \mathbf{N} pour la soustraction.
- \mathbf{Z} pour la soustraction.
- L'ensemble des entiers impairs pour la multiplication.
- \mathbf{Z} pour la soustraction.
- \mathbf{Z} pour la multiplication.
- L'ensemble des intervalles fermés de \mathbf{N} pour \cup .
- L'ensemble des intervalles fermés de \mathbf{N} pour \cap .

2. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).

- La fermeture réflexive transitive d'une relation R , notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
- La fermeture transitive de R est notée R^+

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation $R = \{(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)\}$

3. Soit un ensemble E . On définit sur $P(E)$ la relation binaire $R : X R Y \Leftrightarrow X$ et Y ont le même nombre d'éléments. Montrez que R est une relation d'équivalence.

4. Montrez par récurrence le théorème suivant :

$$\text{Soit } A \text{ un ensemble fini. } |P(A)| = 2^{|A|}.$$

5. Soient R_1 et R_2 deux ordres partiels sur un même ensemble E . Montrez que $R_1 \cap R_2$ est également un ordre partiel.

6. Soient A et B deux ensembles finis. Combien existe-t-il d'applications de A vers B ? Combien sont injectives ? Combien sont surjectives ?

7. Cardinalité. Montrez les propriétés suivantes :

- L'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable.
- $\mathbf{N} \setminus \{3,4,5\}$ est dénombrable.
- S'il existe une injection d'un ensemble E dans \mathbf{N} , alors E est fini ou dénombrable.
- S'il existe une surjection de \mathbf{N} vers un ensemble E , alors E est fini ou dénombrable.
- Soit E un ensemble dénombrable, et $E' \subset E$. Alors E' est également dénombrable.
- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est dénombrable.
- Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
- \mathbf{Q}^+ , l'ensemble des nombres rationnels positifs, est dénombrable.

TD2 – Alphabets, langages, représentation finie

1. Soit Σ un alphabet tel que $|\Sigma| = n$. Combien existe-t-il de mots de longueur $k \geq 0$? Combien existe-t-il de mots de longueur au plus $k \geq 0$?

2. Montrez que pour tout langage L , $L^* = (L^*)^*$.

3. Montrez qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que

- $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$
- $(L_1 \cdot L_2)^* \neq L_1^* \cdot L_2^*$

4. (facultatif) Donnez un algorithme pour énumérer tous les mots de longueur au plus k sur un alphabet à n symboles.

Les **expressions rationnelles** sur un alphabet Σ sont tous les mots construits sur l'alphabet $\Sigma \cup \{(\ , \), \emptyset, \cup, *\}$:

- (1) \emptyset et chaque élément de Σ est une expression rationnelle,
- (2) Si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha\beta)$ et $(\alpha \cup \beta)$ est aussi une expression rationnelle,
- (3) Si α est une expression rationnelle, alors α^* est aussi une expression rationnelle,
- (4) Rien d'autre n'est une expression rationnelle hormis les points (1) à (3).

On dit que deux expressions rationnelles sont équivalentes si elles définissent le même langage.

Soient u et v deux expressions rationnelles. Les égalités suivantes peuvent être démontrées :

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $\emptyset^* = \emptyset$ | 7. $u^*u^* = u^*$ | 13. $(u \cup v)^* = u^*(u \cup v)^*$ |
| 2. $\emptyset u = u\emptyset = u$ | 8. $(u^*)^* = u^*$ | 14. $(u \cup v)^* = (u \cup vu^*)^*$ |
| 3. $uu^* = u^*u$ | 9. $u(v \cup w) = uv \cup uw$ | 15. $(u \cup v)^* = (u^*v^*)^*$ |
| 4. $uu^* \cup \emptyset = u^*$ | 10. $(u \cup v)w = uw \cup vw$ | 16. $(u \cup v)^* = u^*(vu^*)^*$ |
| 5. $u \cup v = v \cup u$ | 11. $(uv)^*u = u(vu)^*$ | 17. $(u \cup v)^* = (u^*vu^*)^* \cup u^*$ |
| 6. $u \cup u = u$ | 12. $(u \cup v)^* = (u^* \cup v^*)^*$ | 18. $(u \cup v)^* = (u^*v)^*u^*$ |

5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Expliquez pourquoi :

- a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$
- b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$
- c) $a^*b^* \cap c^*d^* = \emptyset$
- d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

6. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant les langages sur Σ décrits par les définitions suivantes :

- a) le langage de tous les mots contenant au moins 2 a (i.e. 2 occurrences de la lettre a).
- b) le langage de tous les mots contenant au plus 2 a.
- c) le langage de tous les mots contenant un nombre de a divisible par 3.
- d) le langage de tous les mots ne contenant pas le facteur aa.

7. Donnez une expression rationnelle définissant le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ mais pas } abb\}$

Indication : un mot w du langage peut être décomposée en $w = b^*uv$ où u est une chaîne qui finit par a et ne contient pas abb et v est une chaîne qui commence par a et ne contient pas abb.

8. Pour chacun des langages suivants, donnez une expression régulière représentant son complément.

- a) $(a \cup b)^*b$
- b) $((a \cup b)(a \cup b))^*$
- c) $b^*aa^*b(a \cup b)^*$

9. Montrez les égalités suivantes en utilisant les identités ci-dessus :

- a) $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^* = (a \cup b)^*$
- b) $(a^*b)^* \cup (b^*a)^* = (a \cup b)^*$
- c) $(a \cup b)^*a(a \cup b)^* = b^*a(a \cup b)^*$

TD 3 – Automates à états finis – Déterminisation

1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez un exemple d'automate M déterministe, complet ou non, dans les cas suivants :

- a) M n'accepte aucun mot.
- b) M accepte tous les mots sur l'alphabet Σ .
- c) M n'accepte que les mots formés avec une seule lettre de Σ .
- d) M accepte le langage $L = \{a\}^* \cup \{b\}^*$.

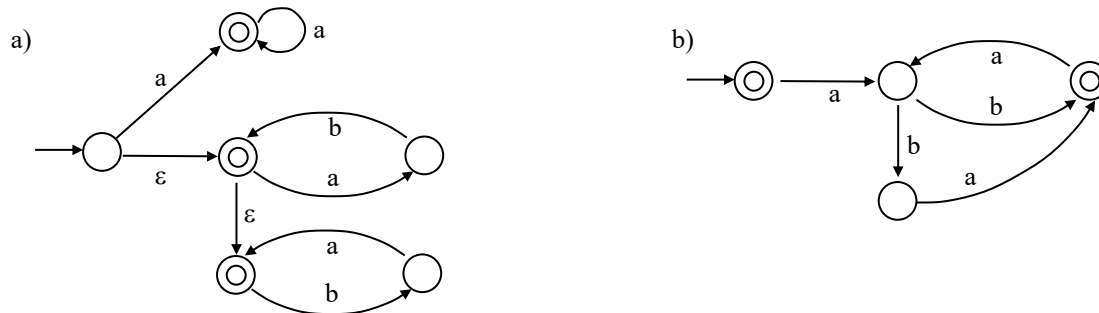
2. Construisez un automate déterministe, complet ou non, acceptant les langages suivants :

- a) Les représentations binaires des nombres pairs.
- b) Les représentations décimales des multiples de 3.

3. Construisez des automates finis déterministes ou non acceptant les langages suivants :

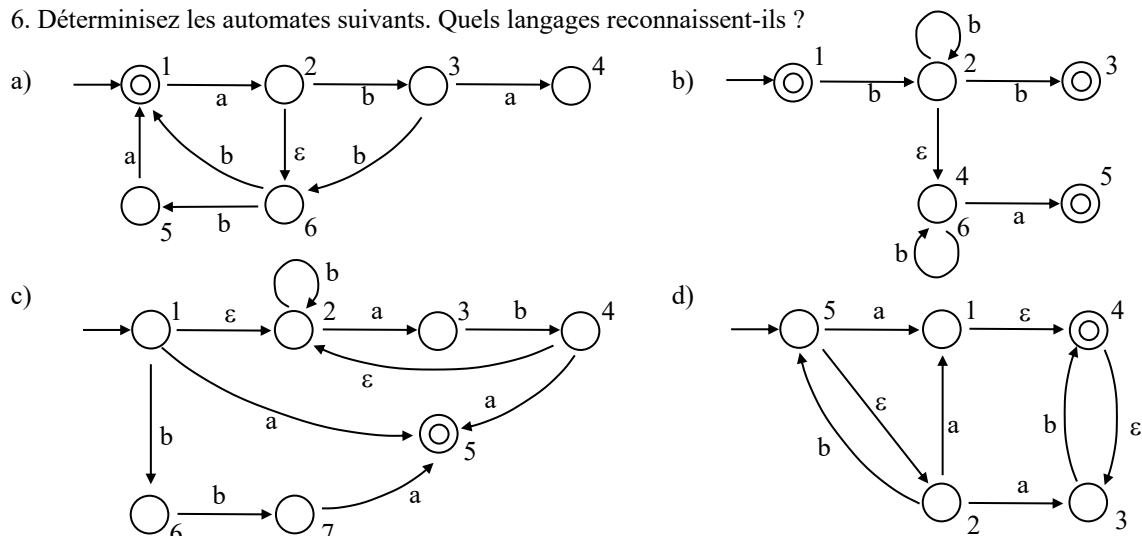
- a) $\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{chaque } a \text{ de } w \text{ est immédiatement précédé et immédiatement suivi par un } b\}$. Noter que le mot babab doit être accepté.
- b) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ne contient ni } ab \text{ ni } ba\}$.
- c) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } ab \text{ ou } ba\}$.
- d) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient à la fois } ab \text{ et } ba\}$. Notez que les mots aba et bab doivent être acceptés.
- e) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ a un nombre impair de } a \text{ et un nombre impair de } b\}$.
- f) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient } aa \text{ et la première occurrence de } aa \text{ ne doit pas être précédée de } abab\}$.
- g) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient une seule fois la sous-chaîne } abba, \text{ et la sous-chaîne } bb \text{ ne figure pas dans } w \text{ en dehors de } abba\}$.
- h) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ ne contient pas } abc\}$.

4. Quels sont les langages acceptés par chacun des automates suivants ?



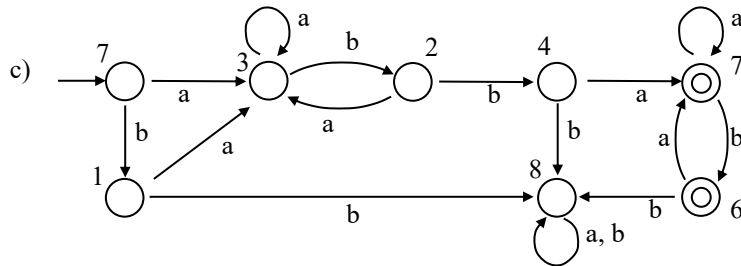
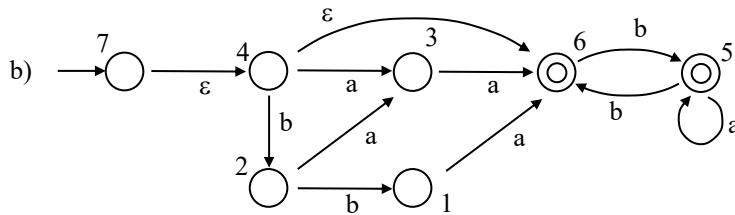
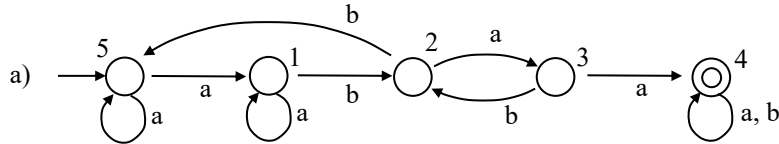
5. Proposez un automate non déterministe acceptant le langage des mots contenant la sous-chaîne ba ou bab.

6. Déterminez les automates suivants. Quels langages reconnaissent-ils ?



TD 4 – Caractérisation – automate standard

1. Quels langages reconnaissent les automates suivants ?



Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage et $x, y \in \Sigma^*$ deux mots.

On dit que x et y sont équivalents suivant L , et on note $x \approx_L y$, si pour tout mot z de Σ^* :

$$xz \in L \text{ ssi } yz \in L$$

Théorème de Myhill – Nerode :

Soit $L \subseteq \Sigma^$ un langage rationnel.*

Il existe un automate déterministe ayant $|\Sigma^ / \approx_L|$ états acceptant L .*

Pour un langage L , l'automate standard $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} K = \{ [x], x \in \Sigma^* \} & F = \{ [x], x \in L \} \\ s = [e] & \delta : \text{définie par } \delta([x], a) = [xa] \end{array}$$

2. Soit le langage $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ est pair et } w \text{ ne contient pas } bb \}$.

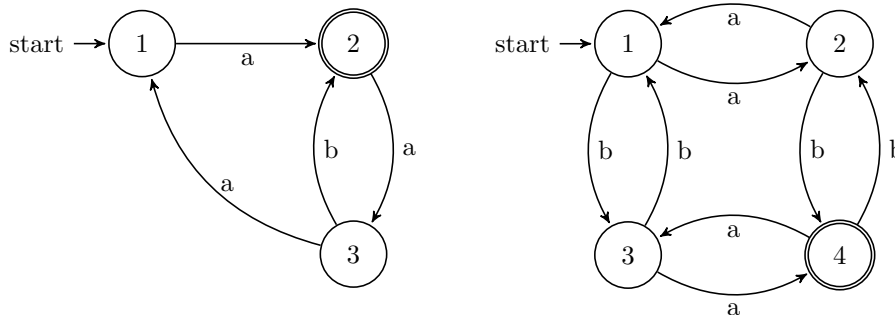
- a) Calculez les classes d'équivalence suivant L ,
- b) Déterminez l'automate standard correspondant à L .

TD 5 – Lemme d’Arden – rationalité

Lemme d’Arden :

$X = eX + f$	avec e, f : expressions régulières	
$e^* . f$	est solution minimale de $X = eX + f$	si $\varepsilon \in e$
	est solution unique de $X = eX + f$	si $\varepsilon \notin e$

1. En utilisant le lemme d’Arden, donnez une expression régulière décrivant le langage reconnu par les automates :



La classe des langages rationnels est stable pour l’union, la concaténation, l’ étoile de Kleene, l’intersection et le complémentaire.

Pour montrer qu’un langage L est **non** rationnel, on fait le raisonnement par l’absurde suivant :

- Supposer L rationnel ;
- Déterminer L_1 rationnel tel que $L_1 \text{ op } L = L_2$ ($\text{op} \in \{\cup, \cdot, *, \cap, \text{complémentaire}\}$), L_2 connu non rationnel ;
- $L_1 \text{ op } L$ rationnel par stabilité, L_2 connu non rationnel, donc contradiction.

2. Montrez que le complémentaire d’un langage non rationnel est non rationnel.

3. Est-ce que la classe des langages non rationnels est stable par

- a) Union ?
- b) Intersection ?
- c) Étoile de Kleene ?

4. À l’aide des propriétés de stabilité, montrez que le langage $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ comporte autant de } a \text{ que de } b \}$ est non rationnel.

Lemme de l’ étoile :

Soit L un langage rationnel infini accepté par un automate déterministe M à k états.
Soit z un mot quelconque de L tel que $|z| \geq k$.
Alors z peut être décomposé en uvw avec $|uv| \leq k$, $|v| \neq 0$ et $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$.

5. À l’aide du lemme de l’ étoile, montrez que le langage $L = \{ a^p b^q \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, q \leq p \}$ est non rationnel.

TD 6 – Grammaires

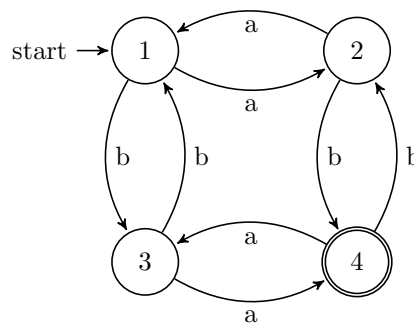
1. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Construisez des grammaires correspondant aux langages :

- a^*
- $(a \cup b)(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^*$
- $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$

2. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit le langage $(a \cup b)^* aa (a \cup b)^*$.

- Construisez une grammaire régulière correspondant à ce langage.
- Déduisez l'automate à états finis de la grammaire construite.

3. Construisez la grammaire régulière engendrant le langage reconnu par l'automate suivant.



4. Construisez l'automate à pile acceptant le langage $\{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$.

5. Soit la grammaire LR(1)

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E \vee T \mid T \\ T &\rightarrow T \wedge F \mid F \\ F &\rightarrow \neg F \mid (E) \mid 0 \mid 1 \end{aligned}$$

- Effectuez l'analyse ascendante de l'expression $0 \vee 1$ puis de l'expression $(0 \vee \neg 0) \wedge (\neg 1 \vee 0)$.
- Ajoutez des actions à la grammaire pour évaluer une expression.
- Évaluez les expressions précédentes.

6. Soit la grammaire LR(1)

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \text{if } B \text{ then } I \mid \text{if } B \text{ then } I \text{ else } I \mid o \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

- Montrez que cette grammaire est ambiguë.
- Effectuez l'analyse ascendante de l'instruction *if b then if b then o else o*. À quelle étape a-t-on le choix entre une lecture et une réduction ? Donnez les arbres de dérivation dans chacun des cas.
- Construisez une grammaire non ambiguë équivalente qui associe chaque *else* avec le *then* le plus proche qui ne correspond pas déjà à un *else*.