

LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2021 – 2022

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Terminologie ensembliste

Ensembles

- Définition d'un ensemble
 - Par **extension** : $\Sigma = \{a, b, c\}$
 - Par **intension** : $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} ; x = 2y\}$
- Opérations ensemblistes
 - Appartient : $x \in E, x \notin E$
 - Ensemble vide : $\forall x \in E_1, x \notin \emptyset$
 - Inclusion : $E_1 \subset E_2, E_1 \not\subset E_2$
 $E_1 \subset E_2$ si $\forall x : (x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2)$
 - Ensemble des **parties** de E : $P(E) = \{E_1 \mid E_1 \subset E\}$
 - Intersection : $E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$
 - Union : $E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$
 - Complémentarité : $C_E^{E_1} = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$
(ou $\neg E_1$ lorsque E est sous entendu)
 - Différence : $E \setminus E_1 = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$
 - Produit cartésien : $E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$

Terminologie ensembliste

Relations

- Relations binaires : $R \in \mathcal{P}(E_1 \times E_2)$, R est un ensemble de couples
- Relations n-aires : $R \in \mathcal{P}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$
- Relations binaires
 - R réflexive $\Leftrightarrow \forall x : x R x$
 - R symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x R y \Rightarrow y R x$
 - R antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x R y \text{ et } y R x \Rightarrow x = y$
 $\Leftrightarrow \forall x, y : x R y \text{ et } x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin R$
 - R transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z : x R y \text{ et } y R z \Rightarrow x R z$
 - Une relation réflexive, symétrique et transitive c'est ... ?
 - Une relation réflexive, antisymétrique et transitive c'est ... ?

Terminologie ensembliste

Stabilité en clôture

- E : ensemble, R : relation n -aire sur E ($R \subset E^n$), E_1 : une partie de E
- E_1 **stable** par R ou **close** par R ssi
$$\forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_1, \dots, x_{n-1} \in E_1 \text{ et } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$$
$$\Rightarrow x_n \in E_1$$
- Plus simple à voir pour R binaire
- Si E_1 non stable par R , il existe un **plus petit** sous ensemble F de E tel que $E_1 \subset F$ et F stable par R
$$\Rightarrow F : \text{cl\^o}t\text{ure de } E_1 \text{ par } R$$
- Soit b une relation sur D , c'est-à-dire $b \subset D^2$
 - **Fermeture transitive** de b : la plus petite relation binaire T telle que $b \subset T$ et T transitive

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- **Fonction** f de E_1 vers E_2 : relation de E_1 vers E_2 telle que
 - $\forall x \in E_1$, il existe **au plus** un élément $y \in E_2$ tel que $x f y$
 - y : **image** de x par f : $y = f(x)$
 - sous-ensemble de E_1 des éléments ayant des images par f : **domaine** de f
- **Composition** de fonctions : \circ
 - $f \circ g (x) = f(g(x)) \quad E_1 \rightarrow (g) \rightarrow E_2 \rightarrow (f) \rightarrow E_3$

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- **Application** f de E_1 vers E_2 : fonction telle que $\text{dom } f = E_1$
- Une application f est **injective**
si $\forall x_1, x_2 \in E_1, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Une application f est **surjective**
si $\forall y \in E_2$, il existe **au moins** un élément x de E_1
tel que $f(x) = y$
- Une **bijection** est une application injective **et** surjective
(Ou $f(E_1) = E_2$.)

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Deux ensembles sont **équipotents** ou **ont même cardinal** ssi il existe une bijection de l'un vers l'autre
- Un ensemble est **fini** s'il est équipotent à $\{1, 2, \dots, n\}$ pour tout entier n
- Un ensemble **infini** est un ensemble non fini
- On dit qu'un ensemble est **infini dénombrable** s'il est équipotent à \mathbf{N} .
- S'il n'existe pas de bijection entre X et une partie de \mathbf{N} , alors on dit que X est **infini non dénombrable**
- Proposition *Il existe des ensembles infinis non dénombrables*