

LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2021 – 2022

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 5

AUTOMATES À ÉTATS FINIS DÉTERMINISATION

Elimination du non-déterminisme

- Définition
 - 2 automates finis (déterministes ou non) sont **équivalents** ssi $L(M) = L(M')$.

- Théorème

*Pour tout automate **non** déterministe, il existe un automate déterministe équivalent, et il existe un algorithme pour le calculer*

*Cet algorithme est appelé **déterminisation** d'un automate.*

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate **non** déterministe.
- Problème : $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$? (M' déterministe)
- Démarche
 - Méthode pour construire M'
 - Montrer
 - M' déterministe
 - M' équivalent à M

Elimination du non-déterminisme

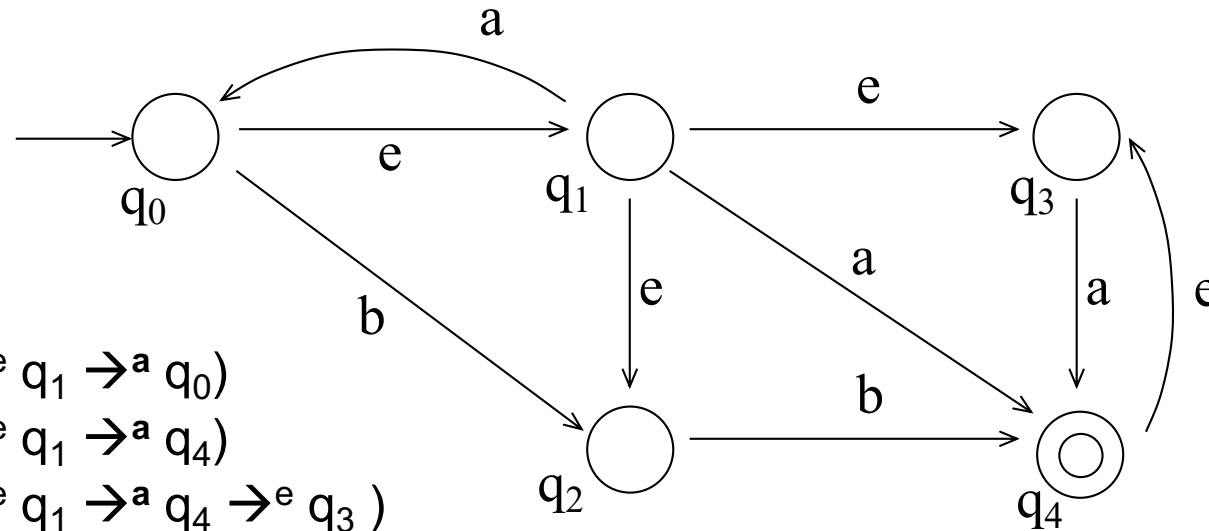
Preuve

- L'idée est la suivante :
 - Pour toute lettre σ de Σ , on considère l'ensemble des états qu'on peut atteindre en lisant σ .
 - On rassemble ces états et on considère des états étiquetés par des parties de K ($P(K)$)
 - L'état initial de M' est l'ensemble des états atteignables en ne lisant aucune lettre.
 - Les états finaux de M' sont les parties (atteignables) de $P(K)$ contenant au moins un état final (de M).

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Exemple



- $q_0 \xrightarrow{a}$
 - q_0 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0$)
 - q_4 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_4$)
 - q_3 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{e} q_3$)
 - q_1 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{e} q_1$)
 - q_2 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2$)
- $q_0 \xrightarrow{b}$
 - q_2 ($q_0 \xrightarrow{b} q_2$)
 - q_4 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2 \xrightarrow{b} q_4$)
 - q_3 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2 \xrightarrow{b} q_4 \xrightarrow{e} q_3$)

état initial : $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Prise en compte des ε -transitions : ε -clôture
- Soit $q \in K$, on note $E(q)$ l'ensemble des états de M atteignables sans lire aucune lettre :

$$E(q) = \{p \in K : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

$E(q)$ est la clôture de $\{q\}$ par la relation binaire $\{(p, r) \mid (p, \varepsilon, r) \in \Delta\}$

- Construction de $E(q)$

$$E(q) := \{q\}$$

tant que il existe une transition $(p, \varepsilon, r) \in \Delta$ avec $p \in E(q)$ et $r \notin E(q)$

$$E(q) := E(q) \cup \{r\}$$

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- $\rightarrow M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$

avec $K' = P(K)$

$$s' = E(s)$$

$$F' = \{Q \subset K : Q \cap F \neq \emptyset\}$$

$$\delta' = P(K) \times \Sigma \rightarrow P(K)$$

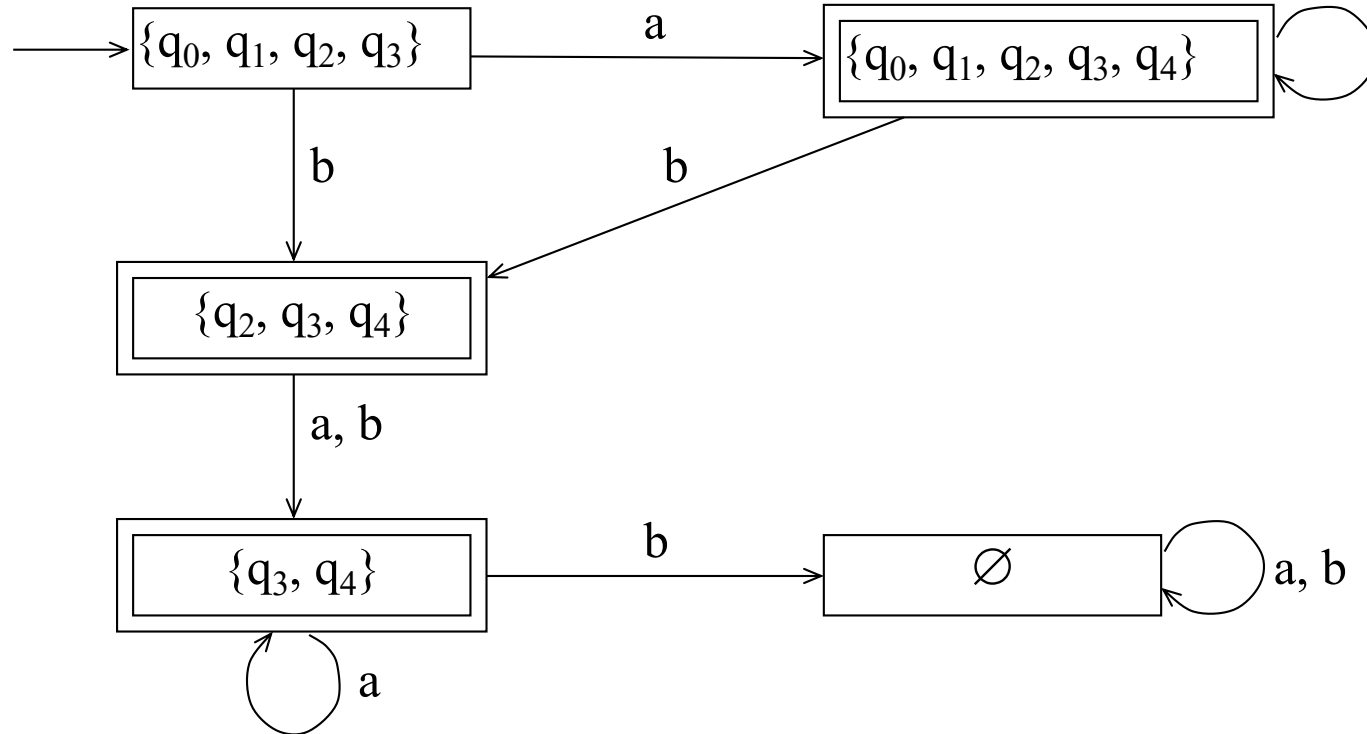
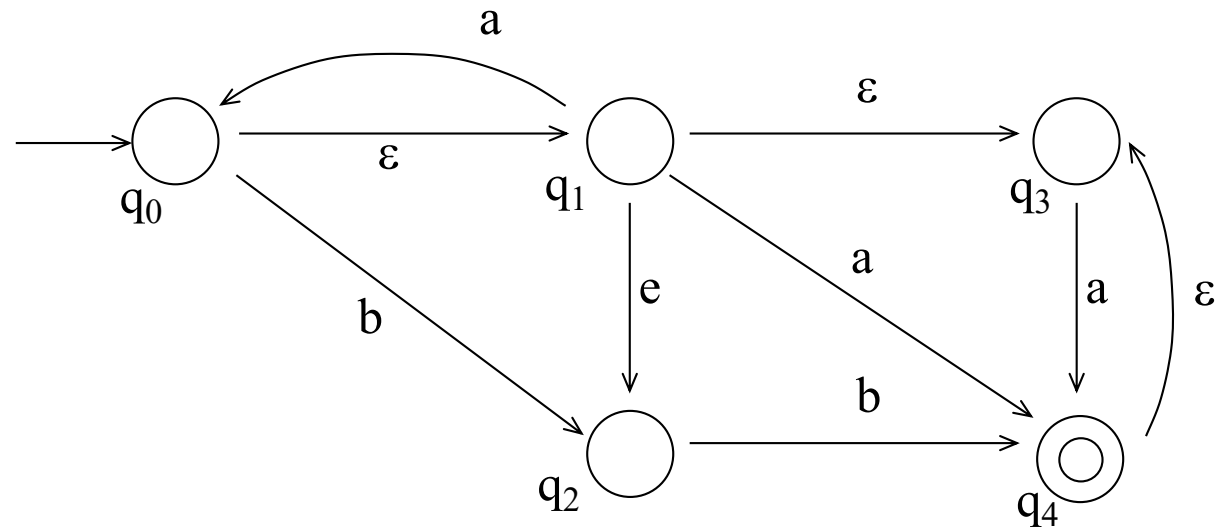
$$\forall Q \subset K, \forall a \in \Sigma,$$

$$\delta'(Q, a) = \cup \{E(p) \mid \exists q \in Q : (q, a, p) \in \Delta\}$$

$\delta'(Q, a)$: ensemble de tous les états (de M) dans lesquels M peut aller en lisant a (y compris ε)

Elimination du non-déterminisme

Exemple

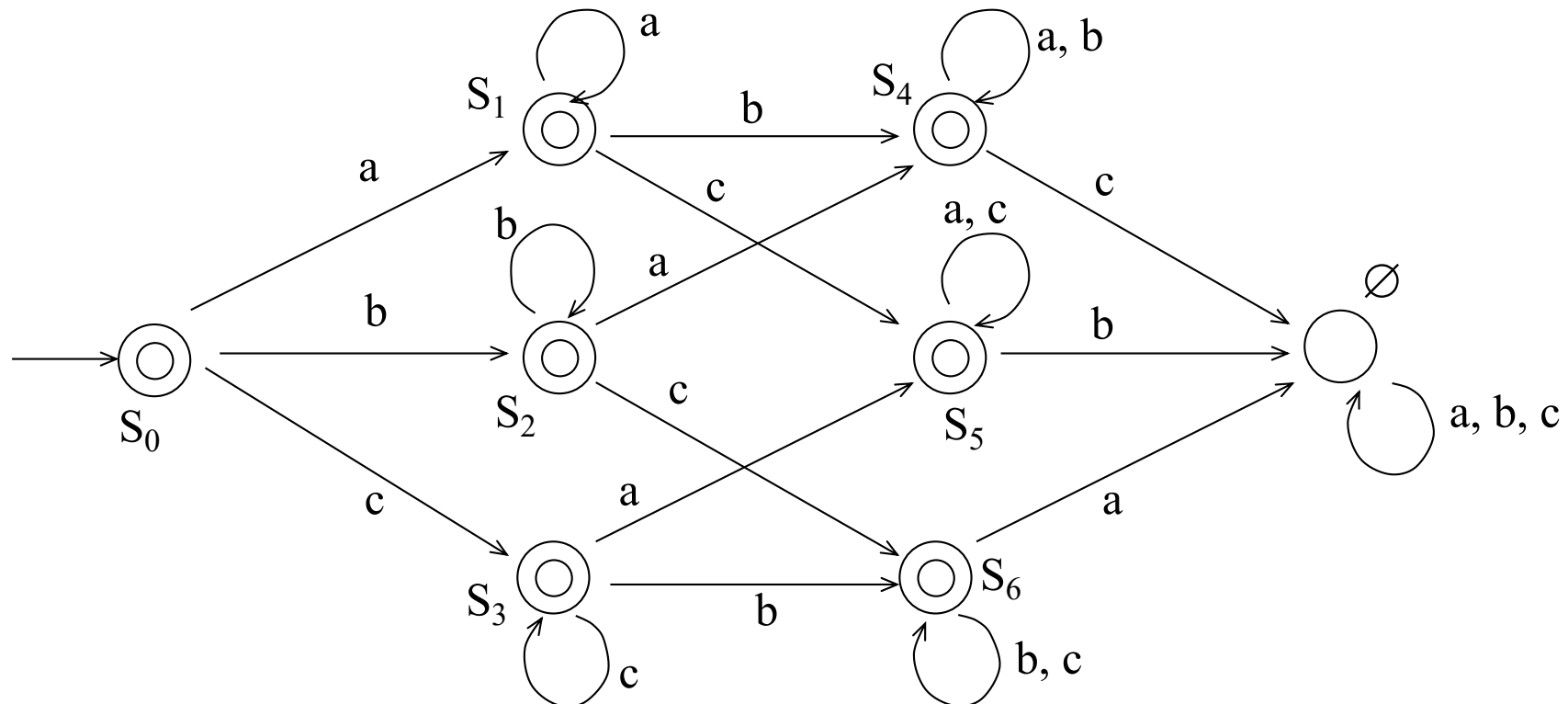
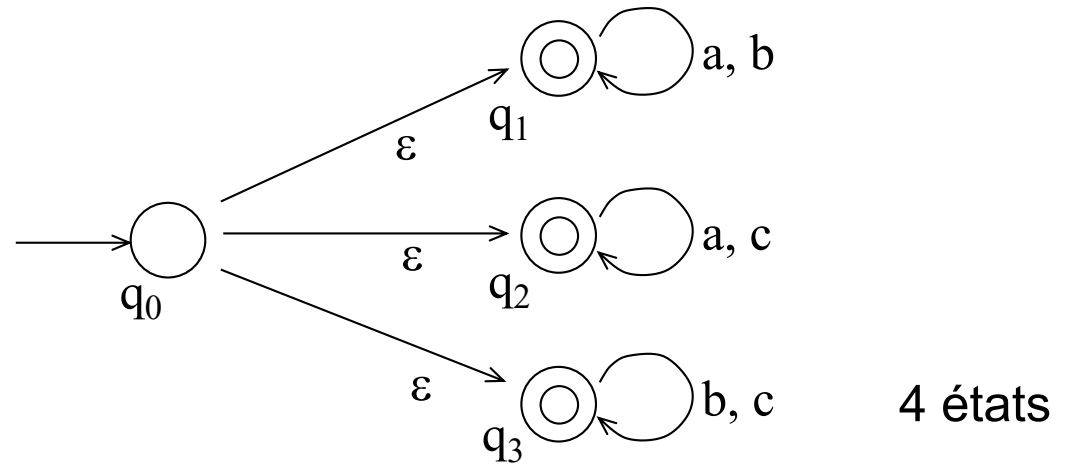


Elimination du non-déterminisme

Autre exemple

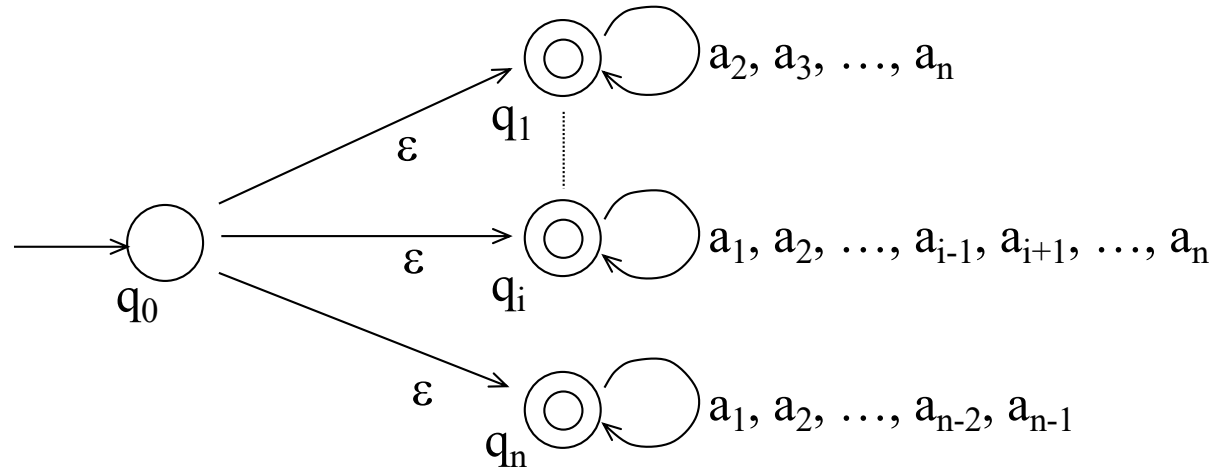
$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$L(M) = (a \cup b)^* \cup (a \cup c)^* \cup (b \cup c)^*$$



Élimination du non-déterminisme

Généralisation



$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma - \{a_1\}$$

...

$$\Sigma_i = \Sigma - \{a_i\}$$

$$\rightarrow L(M) = \cup_{i=1}^n \Sigma_i^*$$