

LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2021 – 2022

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 6

CARACTÉRISATION

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Propriété de stabilité des langages reconnus par des automates finis.

- Théorème

La classe des langages acceptés par les automates finis est stable par :

- *Union*
- *Concaténation*
- *Fermeture itérative*
- *Complément*
- *Intersection*



ordre de la démonstration

- Preuve constructive
 - Construction de l'automate pour chaque opération

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Union

$$\begin{array}{lll} L_1 = L(M_1) & M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) & \rightarrow \text{M\^eme } \Sigma \\ L_2 = L(M_2) & M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) & \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset \end{array}$$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

$$\rightarrow M_{\cup} : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$$

$$w \in L(M_{\cup}) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M (s_1, w) \vdash_M^* (f_1, \varepsilon) (f_1 \in F_1) \quad \leftarrow L_1$$

ou

$$(s, w) \vdash_M (s_2, w) \vdash_M^* (f_2, \varepsilon) (f_2 \in F_2) \quad \leftarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow w \in L_1 \cup L_2$$

$$\rightarrow L(M_{\cup}) = L_1 \cup L_2$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Concaténation

$$\begin{array}{lll} L_1 = L(M_1) & M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) & \rightarrow \text{M\^eme } \Sigma \\ L_2 = L(M_2) & M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) & \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset \end{array}$$

$$\rightarrow M_c : (K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_i, \varepsilon, s_2) \mid f_i \in F_1\}, s_1, F_2)$$

$$\rightarrow L(M_c) = L_1 L_2$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Etoile de Kleene

$$L_1 = L(M_1) \quad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

Posons s tel que $s \notin K_1$

$$\rightarrow M_K : (K_1 \cup \{s\}, \Sigma, \Delta_1 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \cup \{(f_i, \varepsilon, s_1) \mid f_i \in F_1\}, s, F_1 \cup \{s\})$$

$$\rightarrow L(M_K) = L_1^*$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

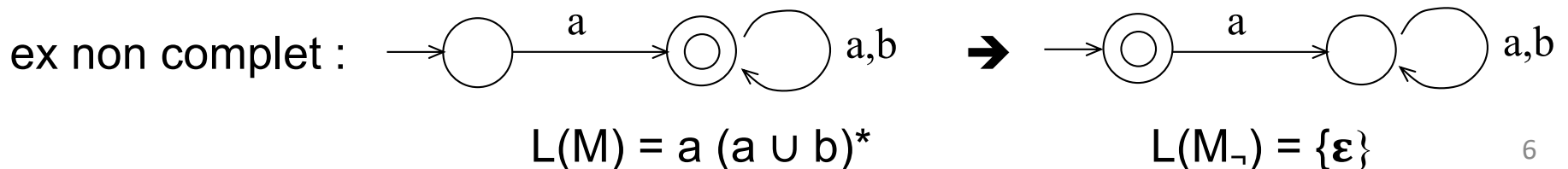
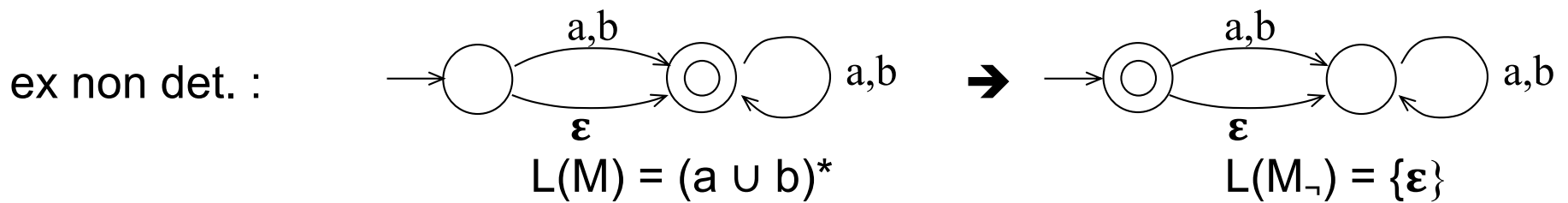
- Complément

$$L_1 = L(M_1) \quad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

$$\rightarrow M_{\neg} : (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, \neg F_1) \text{ avec } \neg F_1 = K_1 - F_1$$

$$\rightarrow L(M_{\neg}) = \neg L_1$$

Attention M_1 doit être **déterministe** et **complet**



Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Intersection

$$L_1 = L(M_1) \quad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

→ Même Σ

$$L_2 = L(M_2) \quad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

- Deux méthodes :

- $L(M_1) \cap L(M_2) = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$

- Automate produit, avec M_1 et M_2 **déterministes** et **complets**

- $M_\cap : (K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \text{ et } (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$

- Quadratique en le nombre d'états

→ $L(M_\cap) = L_1 \cap L_2$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Retour sur l'union

$$\begin{array}{lll} L_1 = L(M_1) & M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) & \rightarrow \text{M\^eme } \Sigma \\ L_2 = L(M_2) & M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) & \rightarrow \text{Hyp. } K_1 \cap K_2 = \emptyset \end{array}$$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

$$\rightarrow M_{\cup} : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$$

- Autre m\^ethode :
 - Automate produit, avec M_1 et M_2 **d\^eterministes** et **complets**
 - $M_{\cup} : (K_1 \times K_2, \Sigma, \{(p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)\} \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \text{ et } (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2)$
 - Quadratique en le nombre d'\^etats

$$\rightarrow L(M_{\cup}) = L_1 \cup L_2$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Automate produit – **intersection**

$$L_1 = L(M_1) \quad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

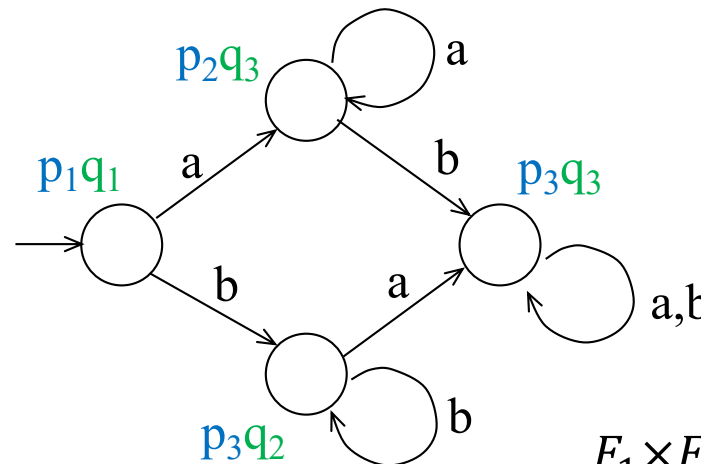
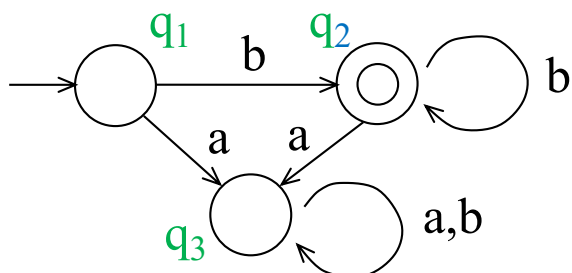
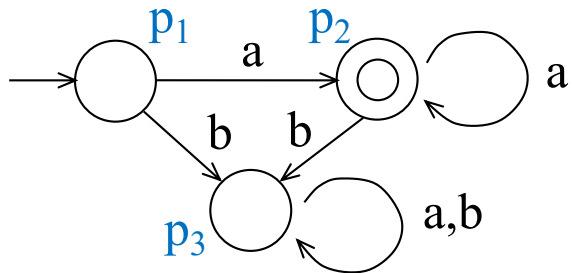
→ Même Σ

$$L_2 = L(M_2) \quad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

- Automate produit, avec M_1 et M_2 **déterministes** et **complets**

- $M_\cap : (K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \text{ et } (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$



$$F_1 \times F_2 = \emptyset$$

Lien avec les langages rationnels

Stabilité

- Automate produit – **union**

$$L_1 = L(M_1) \quad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

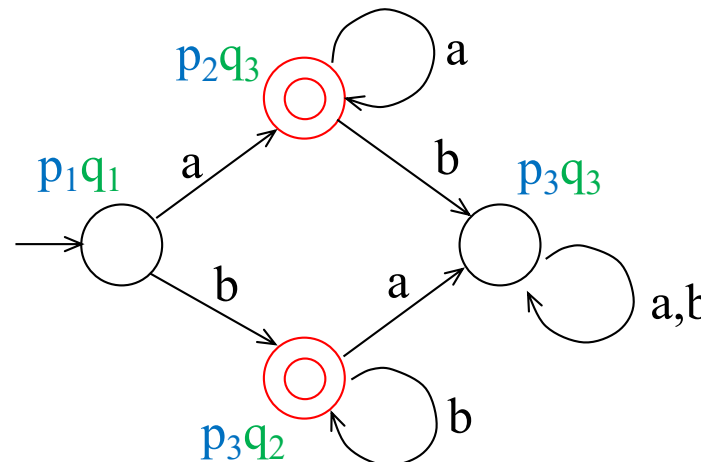
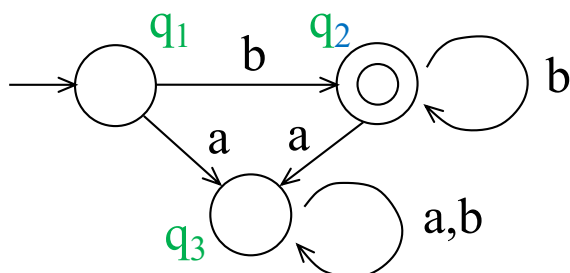
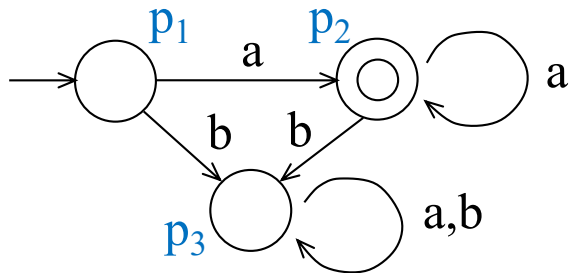
→ Même Σ

$$L_2 = L(M_2) \quad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

- Automate produit, avec M_1 et M_2 **déterministes** et **complets**

- $M_U : (K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \text{ et } (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2)$



Lien avec les langages rationnels

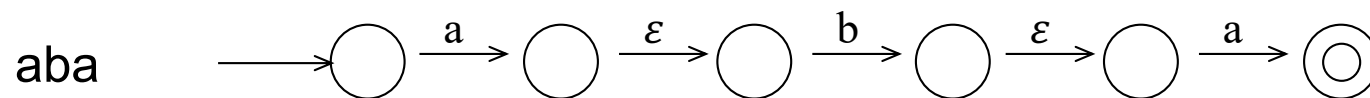
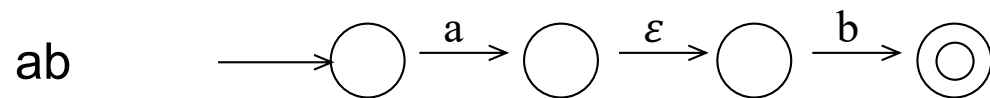
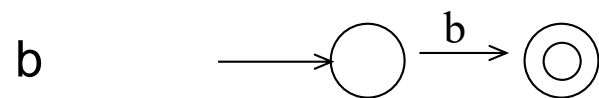
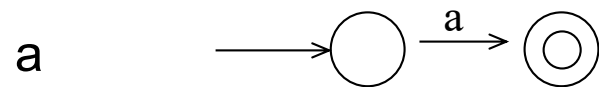
Inclusion des classes de langages

- Théorème

La classe des langages acceptés par les automates finis contient les langages rationnels.

- Exemple

$(ab \cup aba)^*$

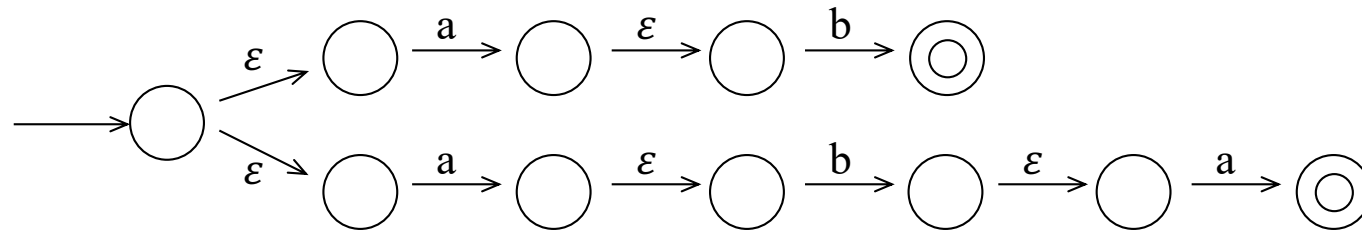


Lien avec les langages rationnels

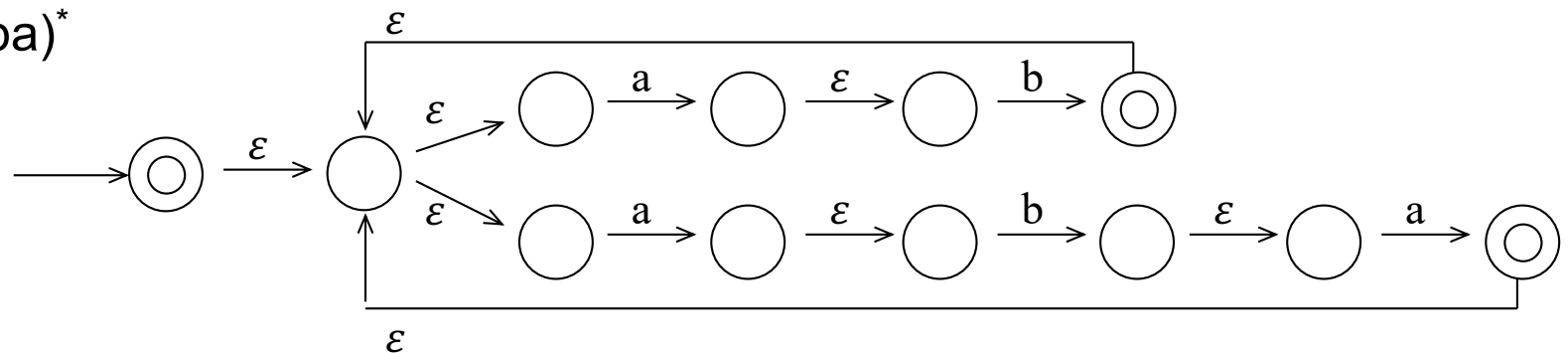
Inclusion des classes de langages

- Exemple
 $(ab \cup aba)^*$

$ab \cup aba$



$(ab \cup aba)^*$



Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Théorème

*Un langage est rationnel **ssi** il est accepté par un automate fini.*

- Preuve

On suppose qu'on a numéroté (ordonné) les états.

Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate fini (déterministe ou non).

$$K = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, s = q_1$$

Le langage reconnu par M est la **réunion** de tous les langages reconnus en parcourant tous les chemins possibles dans le graphe.

→ À chaque chemin allant de s à f ($\in F$), on associe le langage trouvé.

Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- On pose $R(i, j, k) =$ **l'ensemble** des mots obtenus par lecture de l'automate M
 - en partant de l'état q_i ,
 - en arrivant dans l'état q_j (avec le mot vide),
 - **en ne passant que par des états** dont le numéro est **inférieur ou égal à k** .
- $R(i, j, k)$ est un **langage**
- $R(i, j, k) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon) \text{ sans passer par des états dont le numéro est supérieur à } k\}$

$$R(i, j, n) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)\}$$

$$L(M) = \bigcup_{i \mid q_i \in F} R(1, i, n)$$

Lien avec les langages rationnels

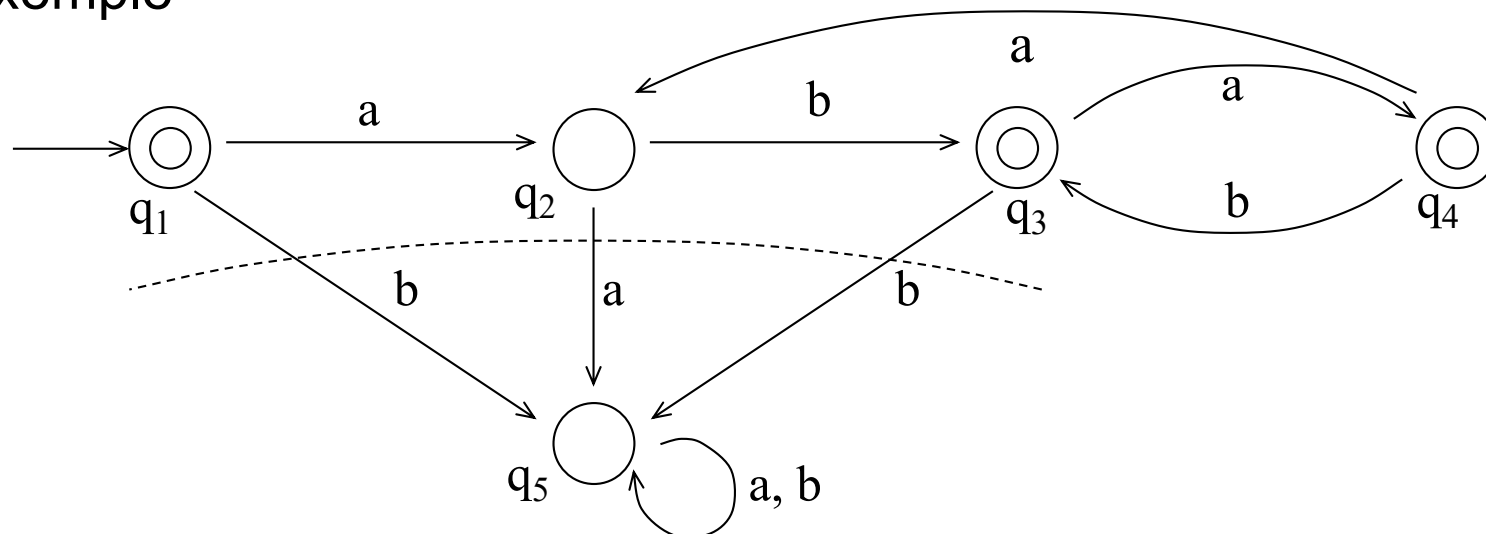
Caractérisation des langages rationnels

- $R(i, j, k)$ est un **langage rationnel** dont on peut calculer la représentation par récurrence sur k .

- Preuve

$$R(i, j, k) = R(i, j, k - 1) \cup R(i, k, k - 1) \cdot (R(k, k, k - 1))^* \cdot R(k, j, k - 1)$$

- Exemple

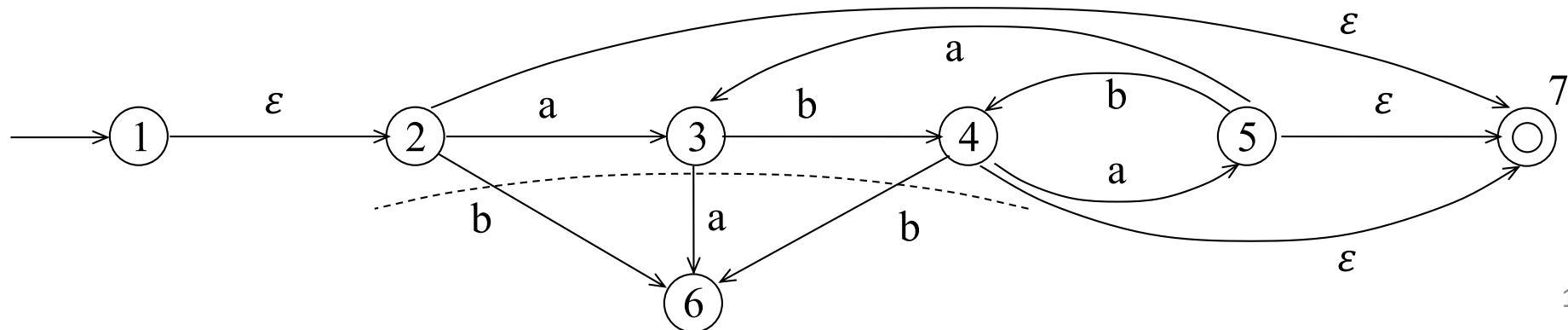
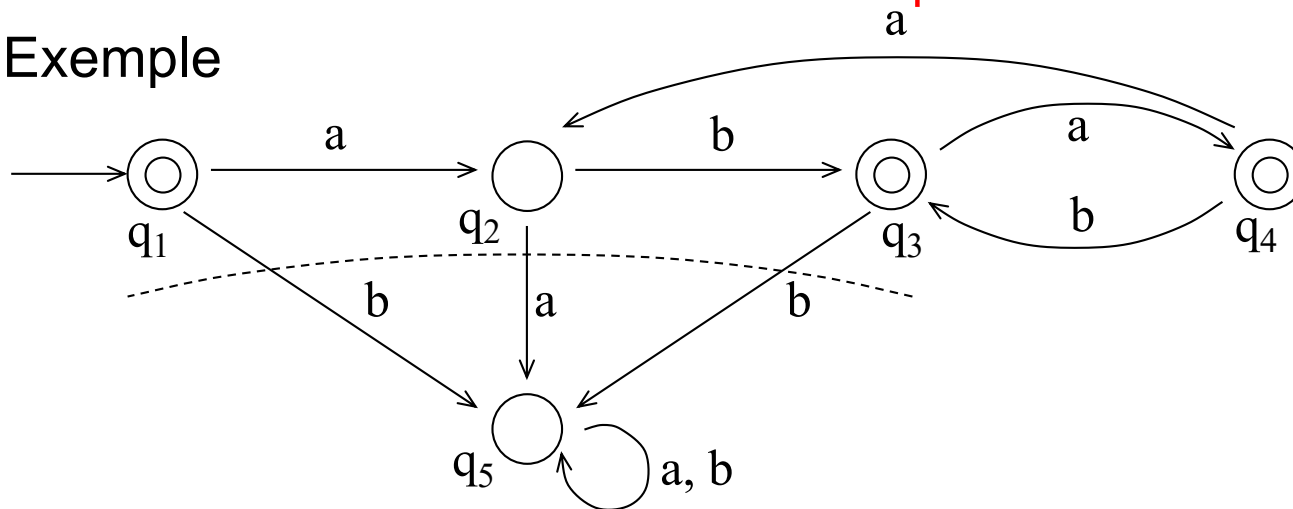


Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Pour simplifier on modifie l'automate (ce qui ne change pas $L(M)$) :
 - Un seul état final f
 - Pas de « retour » de f vers les autres états
 - Pas de « retour » vers l'état initial depuis les autres états

- Exemple



Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

- $R(i, j, 0) \rightarrow$ étiquettes sur les flèches.

- Principe : calculer $R(1, 7, 7)$

$$\begin{aligned} R(1, 7, 7) &= R(1, 7, 6) \cup R(1, 7, 6) R(7, 7, 6)^* R(7, 7, 6) \\ &= R(1, 7, 5) \cup R(1, 6, 5) R(6, 6, 5)^* R(6, 7, 5) \cup \dots \end{aligned}$$

Fastidieux \Rightarrow on calcule les $R(i, j, k)$ de proche en proche.

\rightarrow On supprime q_1 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 1)$)

\rightarrow On supprime q_2 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 2)$)

...

