LIF15 – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2021 – 2022

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 9

AUTOMATES À PILE ALGÉBRICITÉ

Automates à pile

- Définition

  Un automate à pile est un sextuplet M = (K, Σ, Γ, Δ, s, F) avec :

  - K : ensemble fini d'états
  - Σ : ensemble fini de symboles d'entrée (alphabet)
  - Γ : ensemble fini de symboles de la pile
  - s $\in$ K : état initial
  - F $\subseteq$ K : ensemble des états finaux
  - $\Delta \subset (K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\})) \times (K \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$: fonction de transition.

Automates à pile

- Une transition $((p, a, A), (q, B)) \in \Delta$ où :
  - p est l'état courant
  - a est le symbole d'entrée courant
  - A est le symbole sommet de la pile
  - q est le nouvel état
  - B est le nouveau symbole en sommet de pile

a pour effet :

(1) De passer de l'état p à l'état q

(2) D'avancer la tête de lecture après a

(3) De dépiler A du sommet de la pile

(4) D'empiler B sur la pile

Automates à pile

- Définition

  Soit $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ un automate à pile.

  Une configuration de M est définie par un triplet $(q_i, w, \alpha) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ où :

  – q_i est l'état courant de M,

  – w est la partie de la chaîne restant à analyser,

  – α est le contenu de la pile.

- Définition

  Soient (q_i, u, α) et (q_j, v, β) deux configurations d'un automate à pile $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$.

  On dit que (q_i, u, α) conduit à (q_j, v, β) en une étape

  ssi $\exists \sigma \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), \exists A, B \in (\Gamma \cup \{\varepsilon\})$ tels que :

  $$u = \sigma v \text{ et } \alpha = \alpha' A \text{ et } \beta = \beta' B \text{ et } ((q_i, \sigma, A), (q_j, B)) \in \Delta.$$

  On note $(q_i, u, \alpha) \vdash_M (q_j, v, \beta)$.

Automates à pile

- Définition

  La relation $\vdash_M^*$ est la fermeture réflexive transitive de $\vdash_M$.

- Définition

  Soit M = (K, Σ, Γ, Δ, s, F) un automate à pile.

  Un mot w $\in \Sigma^*$ est accepté par M   ssi (s, w, ε) $\vdash_M^*$ (f, ε, ε) avec f $\in$ F.

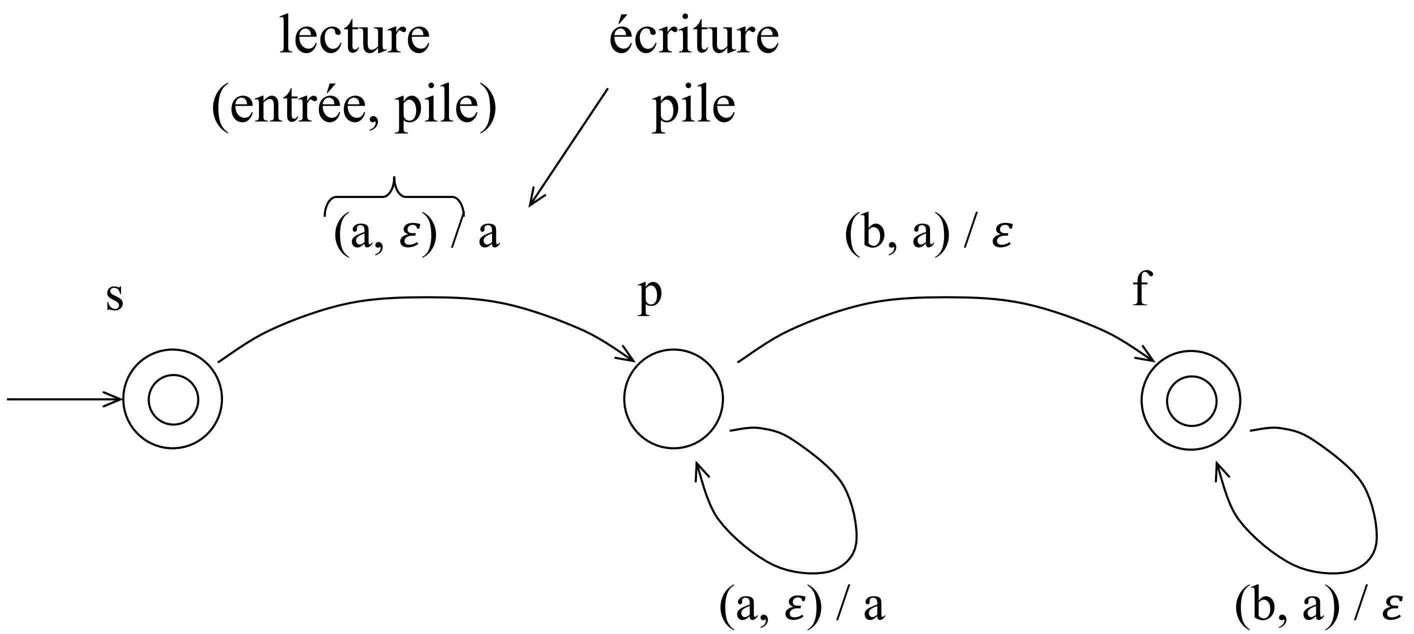
- Définition

  Le langage accepté par M, noté L(M), est l'ensemble des mots acceptés par M.

Automates à pile

- Soit $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ avec :
  - $K = \{s, p, f\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $\Gamma = \{a, b\}$
  - $F = \{s, f\}$

$\Delta = \{$ $((s, a, \varepsilon), (p, a))$,
$((p, a, \varepsilon), (p, a))$,
$((p, b, a), (f, \varepsilon))$,
$((f, b, a), (f, \varepsilon))$ $\}$



Automates à pile

- Un automate à pile est déterministe s'il y a au plus une transition applicable pour tout triplet de la forme

  (État courant, symbole d'entrée, sommet de pile).

- Les automates à pile non déterministes reconnaissent plus de langages que les automates à pile déterministes

Automates à pile et grammaires algébriques

- Théorème

  La classe des langages acceptés par les automates à pile est égale à la classe des langages engendrés par les grammaires algébriques.

- Définition

  Un automate à pile est dit simple ssi quelle que soit la transition $((p, a, \alpha), (q, \beta)) \in \Delta$, on a :

  $\alpha \in \Gamma$ (sauf pour p = S où on ne dépile rien) et $|\beta| \leq 2$

- Proposition

  On peut transformer tout automate à pile en un automate simple équivalent.

Propriétés des langages algébriques

Preuve d’algébricité

- Pour montrer qu'un langage est algébrique, on peut :
  - soit définir une grammaire algébrique qui engendre ce langage,
  - soit définir un automate à pile qui l'accepte.

- Il est également possible d'utiliser les propriétés de stabilité de la classe des langages algébriques

Propriétés des langages algébriques
Propriétés de stabilité

- Théorème

  La classe des langages algébriques est stable par les opérations d'union, de concaténation et d'étoile de Kleene.

- Preuve

  Soient deux grammaires $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ et $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$, avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. (On renomme éventuellement les non-terminaux.)

  La preuve (constructive) consiste à :

  - construire une grammaire G à partir de G_1 et G_2 validant les propriétés de stabilité,
  - montrer que $L(G) = L(G_1)$ op $L(G_2)$ (op $\in \{\cup, .\}$) et $L(G) = L(G_1)^*$.

Propriétés des langages algébriques
Propriétés de stabilité

- Preuve

(a) Union

Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ avec :

- $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ où $S \notin V_1 \cup V_2$ (renommage éventuel)
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\}$

(b) Concaténation

Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ avec :

- $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$ où $S \notin V_1 \cup V_2$ (renommage éventuel)
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \rightarrow S_1S_2\}$

(c) Opération étoile

Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ avec :

- $V = V_1 \cup \{S\}$ où $S \notin V_1$ (renommage éventuel)
- $\Sigma = \Sigma_1$
- $R = R_1 \cup \{S \rightarrow S_1S \mid \varepsilon\}$

Propriétés des langages algébriques
Propriétés de stabilité

- Remarque

  Contrairement à la classe des langages rationnels, la classe des langages algébriques n'est pas stable par intersection et complémentation.

- Théorème

  L'intersection d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

Propriétés des langages algébriques

Lemme de l'étoile pour les langages algébriques

- Définition

  Une grammaire algébrique G = (V, Σ, R, S) est sous forme normale de Chomsky si chaque règle est de la forme :

  $A \rightarrow BC$ avec $B, C \in V - \{S\}$

  ou $A \rightarrow \sigma$ avec $\sigma \in \Sigma$

  ou $A \rightarrow e$

- Théorème

  Pour toute grammaire algébrique, il existe une grammaire sous forme normale de Chomsky équivalente.

Propriétés des langages algébriques

Lemme de l'étoile pour les langages algébriques

- Théorème (lemme de la double étoile)

  Soit L un langage algébrique.

  Il existe un nombre k, dépendant de L, tel que tout mot $z \in L$, $|z| \geq k$, peut être décomposé en $z = uvwxy$ avec :

  (*i*) $|vwx| \leq k$

  (*ii*) $|v| + |x| > 0$ (ie. $v \neq \varepsilon$ ou $x \neq \varepsilon$)

  (*iii*) $uv^iwx^iy \in L$, $\forall\ i \geq 0$

  (d'où l'appellation de double étoile : v^i et x^i = v^* et x^*)

Propriétés des langages algébriques

Lemme de l'étoile pour les langages algébriques

- Lemme

  Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire algébrique sous forme normale de Chomsky.

  Soit $S \Rightarrow_G^* w$ une dérivation de $w \in \Sigma^*$ dont l'arbre de dérivation est noté T.

  Si la hauteur de T est n alors $|w| \leq 2^{n-1}$.

- Corollaire

  Soit $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire algébrique sous forme normale de Chomsky.

  Soit $S \Rightarrow_G^* w$ une dérivation de $w \in L(G)$.

  Si $|w| \geq 2^n$ alors l'arbre de dérivation est de hauteur $\geq n+1$.

Propriétés des langages algébriques

Lemme de l'étoile pour les langages algébriques

- Exemple

Montrons que $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ est non algébrique.

Supposons que L est algébrique.

D'après le lemme de la double étoile, il existe une constante k, dépendant de L, telle que :

$\forall\ z \in L, |z| \geq k$, z peut être décomposé en z = uvwxy avec :

(*i*) $|vwx| \leq k$

(*ii*) $|v| + |x| > 0$ (au moins un des deux n'est pas le mot vide)

(*iii*) $uv^iwx^iy \in L, \forall\ i \geq 0$

Propriétés des langages algébriques

Lemme de l'étoile pour les langages algébriques

- Exemple

  Considérons la chaîne particulière $z_0 = a^k b^k c^k$.
  On a bien $z_0 \in L$ et $|z_0| = 3k \geq k$.
  Les décompositions de z_0 =uvwxy satisfaisant $|vwx| \leq k$ et $|v| + |x| > 0$ sont telles que :

  - Soit l'une des sous-chaînes v ou x contient plus d'un type de symbole, de la forme a^+b^+ ou b^+c^+.
    uv^iwx^iy avec $i > 1$ contient un a après un b ou un b après un c.
    (par exemple uv^2wx^2y = u aabb aabb w x x y, si v = aabb)
    donc la chaîne uv^iwx^iy n'est plus de la forme $a^pb^pc^p$ avec $p \geq 0$,
    donc $uv^iwx^iy \notin L$ pour $n > 1$.

  - Soit v et x sont des sous-chaînes de a^k ou de b^k ou de c^k.
    Comme au plus une des chaînes v ou x est vide, toute chaîne de la forme uv^nwx^ny avec $n > 1$ est caractérisée par une augmentation de un ($v = \varepsilon$ ou $x = \varepsilon$) ou deux ($v \neq \varepsilon$ et $x \neq \varepsilon$) des trois types de terminaux.
    donc pour $n > 1$, la chaîne uv^iwx^iy est de la forme $a^pb^qc^r$ mais avec $p \neq q$ ou $q \neq r$.
    donc $uv^iwx^iy \notin L$ pour $n > 1$.

  - Pas d'autres possibilités pour v et x, les autres sous-chaines u, w et y n'influencent pas.

  Pour toutes les décompositions possibles de la chaîne z_0 il y a une contradiction.

  Donc l'hypothèse est fausse $\Rightarrow$ L non algébrique.

Propriétés des langages algébriques

Preuve de non algébricité

- Pour montrer qu'un langage est non algébrique, on peut utiliser :

  - Le lemme de la double étoile,

  - Les propriétés de stabilité de la classe des langages algébriques,

  - Le théorème qui dit que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage rationnel est algébrique.

Problèmes indécidables pour les langages algébriques

- Une question est décidable s'il existe un algorithme (c'est-à-dire un processus déterministe) qui s'arrête avec une réponse (oui ou non) pour chaque entrée.

- Une question est indécidable si un tel algorithme n'existe pas.

Problèmes indécidables pour les langages algébriques

- Théorème

  Les questions suivantes sont décidables :

  – Étant donnés une grammaire algébrique G et un mot w est-ce que $w \in L(G)$?

  – Étant donnée une grammaire algébrique G, est-ce que $L(G) = \emptyset$?

  Les questions suivantes sont indécidables :

  – *Soit G une grammaire algébrique. Est-ce que $L(G) = \Sigma^*$?*

  – *Soient G_1 et G_2 deux grammaires algébriques. Est-ce que $L(G_1) = L(G_2)$?*

  – *Soient M_1 et M_2 deux automates à pile. Est-ce que $L(M_1) = L(M_2)$?*

  – *Soit M un automate à pile. Trouver un automate à pile équivalent minimal en nombre d'états.*