TD1 – Ensembles et relations

1. Les ensembles suivants sont-ils stables pour l'opération indiquée ? Si la réponse est négative, donnez leur clôture.
   a) **N** pour l'addition.
   b) **N** pour la soustraction.
   c) **Z** pour la soustraction.
   d) L'ensemble des entiers impairs pour la multiplication.
   e) $\mathbf{Z}^-$ pour la soustraction.
   f) $\mathbf{Z}^-$ pour la multiplication.
   g) L'ensemble des intervalles fermés de **N** pour $\cup$.
   h) L'ensemble des intervalles fermés de **N** pour $\cap$.

2. Comme les relations sont des ensembles, on peut parler de fermeture d'une relation (ensemble) par une autre relation (opération).
   - la fermeture réflexive transitive d'une relation R, notée R^* est la fermeture de R pour les relations de réflexivité et de transitivité,
   - la fermeture transitive de R est notée R^+

Donnez la fermeture réflexive transitive de la relation R = {(a, a), (a, c), (a, d), (d, d), (d, e), (e, b), (e, e)}

3. Soit un ensemble E. On définit sur P(E) la relation binaire R : X R Y $\Leftrightarrow$ X et Y ont le même nombre d'éléments. Montrez que R est une relation d'équivalence.

4. Montrez par récurrence le théorème suivant :
   Soit A un ensemble fini. $|P(A)| = 2^{|A|}$.

5. Soient R_1 et R_2 deux ordres partiels sur un même ensemble E. Montrez que $R_1 \cap R_2$ est également un ordre partiel.

6. Soient A et B deux ensembles finis. Combien existe-t-il d'applications de A vers B ? Combien sont injectives ? Combien sont surjectives ?

7. Cardinalité. Montrez les propriétés suivantes :
   a) L'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable n'est pas dénombrable.
   b) **N** \ {3,4,5} est dénombrable.
   c) S'il existe une injection d'un ensemble E dans **N**, alors E est fini ou dénombrable.
   d) S'il existe une surjection de **N** vers un ensemble E, alors E est fini ou dénombrable.
   e) Soit E un ensemble dénombrable, et E' $\subset$ E. Alors E' est également dénombrable.
   f) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ est dénombrable.
   g) Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
   h) $\mathbf{Q}^+$, l'ensemble des nombres rationnels positifs, est dénombrable.