TD2 – Alphabets, langages, représentation finie

1. Soit Σ un alphabet tel que $|\Sigma| = n$. Combien existe-t-il de mots de longueur $k \geq 0$? Combien existe-t-il de mots de longueur au plus $k \geq 0$?

2. Montrez que pour tout langage L, $L^* = (L^*)^*$.

3. Montrez qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que
- $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$
- $(L_1 . L_2)^* \neq L_1^* . L_2^*$

4. (facultatif) Donnez un algorithme pour énumérer tous les mots de longueur au plus k sur un alphabet à n symboles.

Les **expressions rationnelles** sur un alphabet Σ sont tous les mots construits sur l'alphabet $\Sigma \cup \{(,), \varnothing, \cup, *\}$:
(1) $\varnothing$ et chaque élément de Σ est une expression rationnelle,
(2) Si α et β sont des expressions rationnelles, alors $(\alpha\beta)$ et $(\alpha \cup \beta)$ est aussi une expression rationnelle,
(3) Si α est une expression rationnelle, alors α^* est aussi une expression rationnelle,
(4) Rien d'autre n'est une expression rationnelle hormis les points (1) à (3).

On dit que deux expressions rationnelles sont équivalentes si elles définissent le même langage.

Soient u et v deux expressions rationnelles. Les égalités suivantes peuvent être démontrées :

1. $\varnothing^* = \varnothing$	7. $u^*u^* = u^*$	13. $(u \cup v)^* = u^*(u \cup v)^*$
2. $\varnothing u = u\varnothing = u$	8. $(u^*)^* = u^*$	14. $(u \cup v)^* = (u \cup vu^*)^*$
3. $uu^* = u^*u$	9. $u(v \cup w) = uv \cup uw$	15. $(u \cup v)^* = (u^*v^*)^*$
4. $uu^* \cup \varnothing = u^*$	10. $(u \cup v)w = uw \cup vw$	16. $(u \cup v)^* = u^*(vu^*)^*$
5. $u \cup v = v \cup u$	11. $(uv)^*u = u(vu)^*$	17. $(u \cup v)^* = (u^*vu^*)^* \cup u^*$
6. $u \cup u = u$	12. $(u \cup v)^* = (u^* \cup v)^*$	18. $(u \cup v)^* = (u^*v)^*u^*$

5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Expliquez pourquoi :
a) $baa \in a^*b^*a^*b^*$
b) $b^*a^* \cap a^*b^* = a^* \cup b^*$
c) $a^*b^* \cap c^*d^* = \varnothing$
d) $abcd \in (a(cd)^*b)^*$

6. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression rationnelle définissant les langages sur Σ décrits par les définitions suivantes :
a) le langage de tous les mots contenant au moins 2 a (i.e. 2 occurrences de la lettre a).
b) le langage de tous les mots contenant au plus 2 a.
c) le langage de tous les mots contenant un nombre de a divisible par 3.
d) le langage de tous les mots ne contenant pas le facteur aa.

7. Donnez une expression rationnelle définissant le langage $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ contient aa mais pas abb}\}$
Indication : un mot w du langage peut être décomposée en $w = b^*uv$ où u est une chaîne qui finit par a et ne contient pas abb et v est une chaîne qui commence par a et ne contient pas abb.

8. Pour chacun des langages suivants, donnez une expression régulière représentant son complément.
a) $(a \cup b)^*b$
b) $((a \cup b)(a \cup b))^*$
c) $b^*aa^*b(a \cup b)^*$

9. Montrez les égalités suivantes en utilisant les identités ci-dessus :
a) $((a^*b^*)^*(b^*a^*)^*)^* = (a \cup b)^*$
b) $(a^*b)^* \cup (b^*a)^* = (a \cup b)^*$
c) $(a \cup b)^*a(a \cup b)^* = b^*a(a \cup b)^*$