

TD 5 – Lemme d’Arden – rationalité

Lemme d’Arden :

$$X = eX + f$$

avec e, f : expressions régulières

$$e^* . f$$

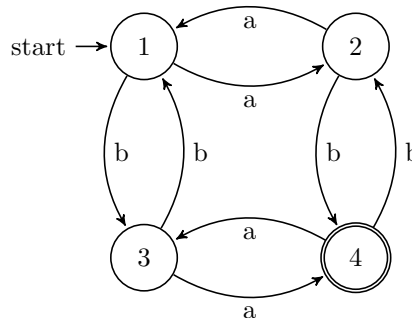
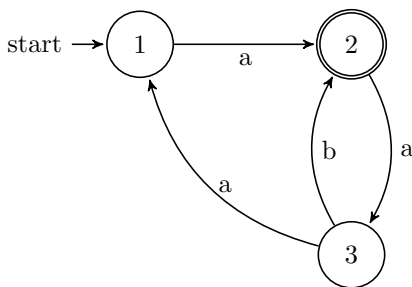
est solution minimale de $X = eX + f$

si $\varepsilon \in e$

est solution unique de $X = eX + f$

si $\varepsilon \notin e$

1. En utilisant le lemme d’Arden, donnez une expression régulière décrivant le langage reconnu par les automates :



La classe des langages rationnels est stable pour l’union, la concaténation, l’ étoile de Kleene, l’intersection et le complémentaire.

Pour montrer qu’un langage L est **non** rationnel, on fait le raisonnement par l’absurde suivant :

- Supposer L rationnel ;
- Déterminer L_1 rationnel tel que $L_1 \text{ op } L = L_2$ ($\text{op} \in \{\cup, \cdot, *, \cap, \text{complémentaire}\}$), L_2 connu non rationnel ;
- $L_1 \text{ op } L$ rationnel par stabilité, L_2 connu non rationnel, donc contradiction.

2. Montrez que le complémentaire d’un langage non rationnel est non rationnel.

3. Est-ce que la classe des langages non rationnels est stable par

- a) Union ?
- b) Intersection ?
- c) Étoile de Kleene ?

4. À l’aide des propriétés de stabilité, montrez que le langage $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ comporte autant de } a \text{ que de } b \}$ est non rationnel.

Lemme de l’ étoile :

Soit L un langage rationnel infini accepté par un automate déterministe M à k états.

Soit z un mot quelconque de L tel que $|z| \geq k$.

Alors z peut être décomposé en uvw avec $|uv| \leq k$, $|v| \neq 0$ et $uv^i w \in L, \forall i \geq 0$.

5. À l’aide du lemme de l’ étoile, montrez que le langage $L = \{ a^p b^q \mid p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}, q \leq p \}$ est non rationnel.