LF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel
2022 – 2023
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Terminologie ensembliste
Ensembles

- Définition d'un ensemble
  - Par extension : $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - Par intension : $P = \{x \in Z \mid \exists\, y \in Z\, ;\, x = 2y\}$

- Opérations ensemblistes
  - Appartient : $x \in E$, $x \notin E$
  - Ensemble vide : $\forall\, x \in E_1,\ x \notin \emptyset$
  - Inclusion : $E_1 \subset E_2$, $E_1 \not\subset E_2$

    $E_1 \subset E_2$ si $\forall\, x : (x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2)$
  - Ensemble des parties de E : $P(E) = \{E_1 \mid E_1 \subset E\}$
  - Intersection : $E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$
  - Union : $E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$
  - Complémentarité : ${C_E}^{E1} = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$

    (ou $\neg E_1$ lorsque E est sous entendu)
  - Différence : $E \setminus E_1 = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$
  - Produit cartésien : $E_1 \times E_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$

Terminologie ensembliste

Relations

- Relations binaires : $R \in P(E_1 \times E_2)$, R est un ensemble de couples
- Relations n-aire : $R \in P(E_1 \times E_2 \times \ldots E_n)$

- Relations binaires
  - R réflexive $\Leftrightarrow \forall x : x\,R\,x$
  - R symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
  - R antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x\,R\,y$ et $y\,R\,x \Rightarrow x = y$
    $\Leftrightarrow \forall x, y : x\,R\,y$ et $x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin R$
  - R transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z : x\,R\,y$ et $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

  - Une relation réflexive, symétrique et transitive c'est … ?
  - Une relation réflexive, antisymétrique et transitive c'est … ?

Terminologie ensembliste

Stabilité en clôture

- E : ensemble, R : relation n-aire sur E ($R \subset E^n$), E_1 : une partie de E

- E_1 stable par R ou close par R ssi

$$\forall\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_1, \ldots, x_{n-1} \in E_1 \text{ et } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$$
$$\Rightarrow x_n \in E_1$$

- Plus simple à voir pour R binaire
- Si E_1 non stable par R, il existe un plus petit sous ensemble F de E tel que $E_1 \subset F$ et F stable par R

  $\Rightarrow$ F : clôture de E_1 par R
- Soit b une relation sur D, c'est-à-dire $b \subset D^2$
  - Fermeture transitive de b : la plus petite relation binaire T telle que $b \subset T$ et T transitive

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Fonction f de E_1 vers E_2 : relation de E_1 vers E_2 telle que

  $\forall$ x $\in E_1$, il existe au plus un élément y $\in E_2$ tel que x f y

  – y : image de x par f : y = f(x)
  – sous-ensemble de E_1 des éléments ayant des images par f : domaine de f

- Composition de fonctions : $\circ$

  $f \circ g\,(x) = f(g(x))$ $\quad E_1 \rightarrow (g) \rightarrow E_2 \rightarrow (f\,) \rightarrow E_3$

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Application f de E_1 vers E_2 : fonction telle que dom f = E_1
- Une application f est injective

  si $\forall\ x_1, x_2 \in E_1, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Une application f est surjective

  si $\forall\ y \in E_2$, il existe au moins un élément x de E_1

  tel que $f(x) = y$
- Une bijection est une application injective et surjective

  (Ou $f(E_1) = E_2$.)

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Deux ensembles sont équipotents ou ont même cardinal

  ssi il existe une bijection de l'un vers l'autre

- Un ensemble est fini s'il est équipotent à {1, 2, … n}

  pour tout entier n
- Un ensemble infini est un ensemble non fini

- On dit qu'un ensemble est infini dénombrable s'il est équipotent à **N**.
- S'il n'existe pas de bijection entre X et une partie de N, alors on dit que X est infini non dénombrable

- Proposition *Il existe des ensembles infinis non dénombrables*