

Durée : 1H30

Tous documents papier autorisés. Appareils électroniques non autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.

1 – Ensembles et relations (2 pts)

Montrez par récurrence que $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n.(n+1).(n+2) = (n.(n+1).(n+2).(n+3)) / 4$.

2 – Alphabets (4 pts)

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

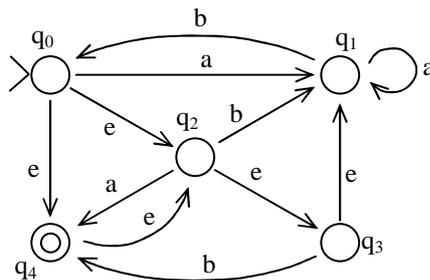
On considère l'ensemble M des mots sur Σ tels que toute lettre c est suivie de la lettre a. Par exemple le mot cabbca $\in M$, le mot abcba $\notin M$.

On considère l'ensemble P des mots sur Σ définis inductivement de la manière suivante :

- i) $e \in P$
 - ii) pour tout $w \in P$, $aw \in P$, $bw \in P$ et $caw \in P$
- a) Donnez tous les mots de P de longueur inférieure ou égale à 3.
 - b) Montrez par récurrence que $P \subset M$.
 - c) Montrez par récurrence sur la longueur des mots de M que $M \subset P$.

3 – Automates à états finis (4 pts)

Soit l'automate M :



- a) Utilisez l'algorithme vu en cours pour construire M^* , l'automate déterministe équivalent à M.
- b) Utilisez l'algorithme vu en cours pour déduire de M^* l'expression rationnelle correspondant au langage défini par M.

4 – Rationalité (5 pts)

4.1. On considère l'affirmation :

Tout sous ensemble d'un langage rationnel est un langage rationnel.

Cette affirmation est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

4.2. Soit le langage $L_1 = \{ a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$.

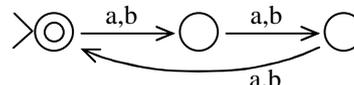
- a) L_1 est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.
- b) $\neg L_1$ est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.

5 – Grammaires algébriques (5 pts)

5.3. On considère deux langages sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

- L_1 : langage algébrique engendré par la grammaire $G = (V, \Sigma, R, S)$ avec $V = \{S, E\}$ et $R = \{S \rightarrow aSb \mid E, E \rightarrow bEa \mid e\}$.

- L_2 : langage rationnel accepté par l'automate



- a) Dites de manière informelle quels sont les langages L_1 et L_2 .
- b) On pose $L = L_1 \cap L_2$. L est-il rationnel ? Algébrique ?
si L est rationnel, donnez une expression rationnelle **et** un automate à états finis correspondant à L, sinon donnez une grammaire algébrique **et** un automate à pile correspondant à L.