

Durée : 1H30

Tous documents papier autorisés. Appareils électroniques non autorisés.

Le barème est donné à titre indicatif.

### 1 – Ensembles et relations (2 pts)

Montrez par récurrence que  $1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n.(n+1).(n+2) = (n.(n+1).(n+2).(n+3)) / 4$ .

### 2 – Alphabets (4 pts)

Soit l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .

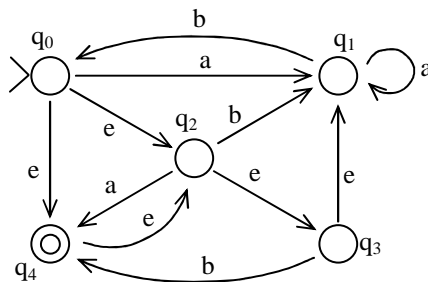
On considère l'ensemble M des mots sur  $\Sigma$  tels que toute lettre c est suivie de la lettre a. Par exemple le mot cabbca  $\in M$ , le mot abcba  $\notin M$ .

On considère l'ensemble P des mots sur  $\Sigma$  définis inductivement de la manière suivante :

- i)  $e \in P$
  - ii) pour tout  $w \in P$ ,  $aw \in P$ ,  $bw \in P$  et  $caw \in P$
- a) Donnez tous les mots de P de longueur inférieure ou égale à 3.
  - b) Montrez par récurrence que  $P \subset M$ .
  - c) Montrez par récurrence sur la longueur des mots de M que  $M \subset P$ .

### 3 – Automates à états finis (4 pts)

Soit l'automate M :



- a) Utilisez l'algorithme vu en cours pour construire  $M'$ , l'automate déterministe équivalent à M.
- b) Utilisez l'algorithme vu en cours pour déduire de  $M'$  l'expression rationnelle correspondant au langage défini par M.

### 4 – Rationalité (5 pts)

4.1. On considère l'affirmation :

*Tout sous ensemble d'un langage rationnel est un langage rationnel.*

Cette affirmation est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

4.2. Soit le langage  $L_1 = \{ a^n b^m c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$ .

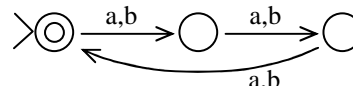
- a)  $L_1$  est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.
- b)  $\neg L_1$  est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.

### 5 – Grammaires algébriques (5 pts)

5.3. On considère deux langages sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  :

- $L_1$  : langage algébrique engendré par la grammaire  $G = (V, \Sigma, R, S)$  avec  $V = \{S, E\}$  et  $R = \{S \rightarrow aSb \mid E, E \rightarrow bEa \mid e\}$ .

- $L_2$  : langage rationnel accepté par l'automate



- a) Dites de manière informelle quels sont les langages  $L_1$  et  $L_2$ .
- b) On pose  $L = L_1 \cap L_2$ . L est-il rationnel ? Algébrique ?  
si L est rationnel, donnez une expression rationnelle **et** un automate à états finis correspondant à L,  
sinon donnez une grammaire algébrique **et** un automate à pile correspondant à L.