Durée : 1H00
Tous documents papier autorisés. Appareils électroniques non autorisés.

1. On considère sur $\Sigma = \{a,b\}$ le langage L des mots dont la première lettre et la dernière lettre sont différentes.
   a) Donnez une expression rationnelle pour décrire L.
   b) Donnez une expression rationnelle pour décrire le complément de L.
   c) Dessinez un automate non déterministe qui reconnait L.
   d) Déterminisez l'automate précédent.

2. L'utilisation du lemme de l'étoile n'est pas le seul moyen de montrer la non-rationalité de certains langages. Nous allons étudier ici le *non-pumping lemma*.
   a) Rappelez le corollaire du théorème de Myhill – Nerode vu en cours.

Un langage est rationnel si et seulement si le nombre de classe d'équivalence suivant ce langage est fini.

---

   b) Soit Σ un alphabet, $L \subset \Sigma^*$ un langage rationnel et w un mot de Σ^*. On rappelle que [u] dénote la classe d'équivalence du mot *u* suivant le langage *L*. Montrez qu'il existe deux entiers *m* et *n* distincts strictement positifs tels que $[w^m] = [w^n]$. Déduisez-en le théorème :

> Soit $L \subset \Sigma^*$ un langage rationnel. Pour tout mot w de Σ^*, il existe deux entiers $m > n > 0$ tels que $\forall\, u \in \Sigma^*$, $w^m u \in L$ si et seulement si $w^n u \in L$.

Le nombre de classes d'équivalence suivant L étant fini, pour tout mot w l'ensemble $\{[w^n] \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ est donc fini. Il existe donc deux entiers distincts *m* et *n* tels que $[w^m] = [w^n]$, et on peut supposer $m > n > 0$. Le théorème énoncé en découle immédiatement en explicitant la définition des classes d'équivalence suivant L.

---

   c) Utilisez le théorème précédent pour montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :
      - $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Supposons L_1 rationnel. D'après le théorème ci-dessus, il existe deux entiers $m > n > 0$ tels que $[a^m] = [a^n]$. Or $a^m b^n \notin L_1$ et $a^n b^n \in L_1$, donc contradiction, donc hypothèse fausse, donc L_1 non rationnel.

      - $L_2 = \{uu^R w \mid u, w \in \{a,b\}^*\}$

Soit w = ab. Si L_2 était rationnel, il existerait deux entiers $m > n > 0$ tels que $[(ab)^m] = [(ab)^n]$. Mais alors $(ab)^n(ba)^n \in L_2$ alors que $(ab)^n(ba)^m \notin L_2$. En effet, si $(ab)^n(ba)^m \in L_2$ alors il existerait $x \neq e$ et u tels que $(ab)^n(ba)^m = xx^R u$, la dernière lettre de x étant égale à la première lettre de x^R, on a forcément $x = (ab)^n$, mais alors w ne contient plus assez de lettres pour finir la décomposition, donc $(ab)^n(ba)^m \notin L_2$. Ceci contredit l'hypothèse de rationalité de L_2.

---

3. Soit la grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, R, S)$ avec

$$V = \{S, X\},\ \Sigma = \{a, b\},\ R = \{S \rightarrow XbX,\ X \rightarrow S \mid XaXbX \mid XbXaX \mid e\}$$

   a) Quel est langage L généré par G ? Exprimez votre réponse de manière formelle ou non. Prouvez votre réponse (rappel : il y a deux démonstrations à faire).
   b) Montrez que le langage $L' = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ est algébrique.
   c) Montrez que la classe des langages rationnels est stable par différence ensembliste.
   d) Déduisez de ce qui précède que L' est non rationnel.