Tous documents papier autorisés. Appareils électroniques non autorisés.

Durée : 1H00

Le barème est donné à titre **indicatif**.

## A – rationalité (4 pts)

Soient les deux langages suivants :

- $L_1 = \{u\ v\ u^R \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u| > 0, |v| > 0\}$, $u^R$ étant le miroir (*reverse*) de u,
- $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N}, \mathrm{pgcd}(n, m) = 1\}$, pgcd dénotant le plus grand commun diviseur (autrement dit m et n sont premiers entre eux).

**[Q1 – 2 pts]** $L_1$ est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.

**[Q2 – 2 pts]** $L_2$ est-il rationnel ? Prouvez votre réponse.

## B – langages à un seul symbole (8 pts)

Dans tout cet exercice on considère des langages sur un alphabet $\Sigma$ à un seul symbole.
On dit qu'un langage L sur $\Sigma = \{a\}$ est *affine* s'il existe deux constantes r et s telles que $L = \{a^{kr+s} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

**[Q3– 2 pts]** Montrez que tout langage affine L est uniquement déterminé par la donnée de ses deux premiers mots.

**[Q4 – 2 pts]** Est-ce que la classe des langages affines est stable par union ?

**[Q5 – 2 pts]** Montrez que tout langage affine est rationnel. La réciproque est-elle vraie ? (justifiez votre réponse)

**[Q6 – 2 pts]** Montrez que tout langage L rationnel sur $\Sigma = \{a\}$ est la réunion d'un langage fini et d'une union finie de langages affines.

## C – langages algébriques (8 pts)

Soient les deux langages suivants :

- $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$
- $L_2 = \{w = a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N}, n \neq m\}$

**[Q7 – 2 pts]** Montrez que $L_1$ est algébrique.

**[Q8 – 2 pts]** Montrez que $L_2$ est algébrique.

**[Q9 – 2 pts]** Montrez que $L_1$ est non rationnel.

**[Q10 – 2 pts]** Montrez que $L_2$ est non rationnel.