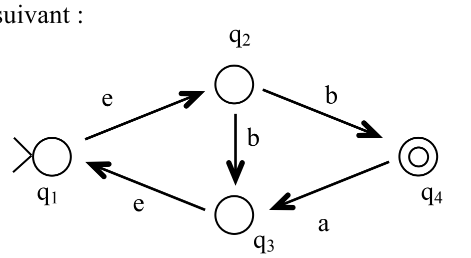
Tous documents papier et appareils électroniques **interdits**.

Durée : 1H00

Le barème est donné à titre **indicatif**.
Les questions suivent l'ordre du cours. Les questions avec une * sont *a priori* plus difficiles que les autres.

[Q1 – 4 pts] Soit l'automate M suivant :



a) Déterminisez l'automate M.
b) En utilisant l'algorithme du cours, donnez une expression rationnelle correspondant au langage accepté par M.

[Q2 – 5 pts]* Soit M = (K, Σ, δ, s, F) un automate à états finis déterministe. Donnez une définition formelle de l'automate M' = (K', Σ, δ', s', F') déterministe, défini sur le même alphabet Σ, tel que ∀ w ∈ Σ*, M' accepte w si et seulement si M accepte ww.

[Q3 – 3 pts] Soit le langage $L = \{w = a^p b^q c^r \mid p, q, r \in \mathbf{N}, p^2 + q^2 = r^2\}$. Montrez que L est non rationnel.

[Q4 – 5 pts]* On rappelle qu'une grammaire G est dite ambiguë si G peut produire plusieurs arbres de dérivation distincts associés à un même mot.

Soient les grammaire $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow SaS \mid b\}, S)$ et $G_2 = (\{S,T\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow bT, T \rightarrow abT \mid e\}, S)$.
a) Montrez que G_1 est ambiguë.
b) Montrez que G_2 n'est pas ambiguë.
c) Quel est le langage engendré par G_2 ?
d) Montrez que $L(G_2) = L(G_1)$.

[Q5 – 3 pts] Soit le langage $L = \{w = a^p b^q c^r \mid p, q, r \in \mathbf{N}, p \neq r\}$. Montrez que L est algébrique.

Annexe

On rappelle le lemme de l'étoile :

Soit L un langage rationnel. L est donc reconnu par un automate M à k états.
$\forall z \in L, |z| \geq k, \exists u, v, w \in \Sigma^*$ tels que $z = uvw$, $|uv| \leq k$, $|v| > 0$ et pour tout $i \geq 0$, $uv^iw \in L$.