Tous documents papier et appareils électroniques **interdits**.

Durée : 1H00

Le barème est donné à titre **indicatif**.
Les questions suivent l'ordre du cours. Les questions avec une * sont *a priori* plus difficiles que les autres.

[Q1 – 2 pts] Soit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Soit $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ est un multiple de 3 en représentation décimale (base 10)$\}$. Par exemple, $1 \notin L_1$, $3 \in L_1$, $12 \in L_1$, $13 \notin L_1$.
Construisez un automate à états finis déterministe M_1 tel que $L(M_1) = L_1$.

[Q2 – 5 pts] Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Soit $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ comporte un nombre **pair** de a et un nombre **impair** de b$\}$.

a) Construisez un automate à états finis déterministe M_2 tel que $L(M_2) = L_2$.
b) En utilisant l'algorithme du cours, déterminez une expression rationnelle correspondant à M_2.

[Q3 – 6 pts] Soit L_3 le langage défini par l'expression rationnelle $(aba \cup bab)^*$.

a) Calculez les classes d'équivalence de la relation $\approx_{L3}$.
b) Déduisez-en l'automate standard correspondant à L_3 (cf. annexe pour la définition d'un automate standard).

[Q4 – 3 pts] Soit L un langage rationnel. Soit M un automate à états finis déterministe tel que $L(M) = L$. Soit p le nombre d'états de M.
* Montrez que L est un langage infini si et seulement si L contient un mot w tel que $p \le |w| \le 2p - 1$.

[Q5 – 4 pts] Soit le langage $L_5 = \{w = a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N}, n \neq m\}$.

a) * Montrez que L_5 est non rationnel.
b) Montrez que L_5 est algébrique.

Annexe

Pour un langage L, l'automate standard $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ est défini de la manière suivante :

$K = \{ [x], x \in \Sigma^* \}$
$F = \{ [x], x \in L \}$
$s = [e]$
δ : définie par $\delta([x], a) = [xa]$

On rappelle le lemme de l'étoile :

Soit L un langage rationnel. L est donc reconnu par un automate M à k états.
$\forall z \in L, |z| \ge k, \exists u, v, w \in \Sigma^*$ tels que $z = uvw$, $|uv| \le k$, $|v| > 0$ et pour tout $i \ge 0$, $uv^iw \in L$.