Tous documents papier autorisés. Appareils électroniques non autorisés.

Durée : 1H00

Le barème est donné à titre **indicatif**.

## A – automates à états finis (4 pts)

Soit la grammaire régulière $G = (V, \Sigma, R, S)$
avec $V = \{S, P, E\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ et $R = \{S \rightarrow abP,\ P \rightarrow aaE \mid aS,\ E \rightarrow bbb \mid aP\}$.

**[Q1 – 2 pts]** Construisez un automate à états finis M acceptant le langage L(G).

**[Q2 – 2 pts]** En utilisant l'algorithme vu en cours, déterminez une expression rationnelle correspondant au langage L(M).

## B – automates à plusieurs états initiaux (8 pts)

Nous donnons ici une nouvelle définition des automates à états finis, avec plusieurs états initiaux. Un automate M est défini par le quintuplet $M = (K, \Sigma, \Delta, S, F)$ où S est un **ensemble** d'états initiaux, les définitions de $K$, $\Sigma$, $\Delta$ et F sont inchangées. Un tel automate peut commencer par n'importe quel état parmi ses états initiaux, l'état de départ étant choisi de manière non déterministe.

**[Q3 – 2 pts]** Soit $L_1 = (a \cup b)^* \cup (b \cup c)^* \cup (c \cup a)^*$. Donnez un automate à plusieurs états initiaux reconnaissant $L_1$, sans utiliser de transitions spontanées. Attention, ne donnez pas l'automate déterministe (à un état initial) du cours.

**[Q4 – 2 pts]** Soit $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \geq 2$. Soit $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid$ il existe un symbole $a_i \in \Sigma$ qui n'apparaît pas dans $w\}$. $L_2$ est une généralisation de $L_1$. Donnez un automate à plusieurs états initiaux reconnaissant $L_2$, sans utiliser de transitions spontanées. Vous préciserez la relation $\Delta$ de manière formelle, en fonction de n.

**[Q5 – 4 pts]** Montrez que cette nouvelle définition (avec plusieurs états initiaux) n'est pas plus générale que la définition classique (avec un seul état initial), dans le sens où elle ne permet pas de reconnaître une classe plus étendue de langages.

## C – rationalité (4 pts)

Soient les deux langages suivants :

- $L_1 = \{a^n b a^m b a^{m+n} \mid m,n \geq 1\}$,
- $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N}, \text{pgcd}(n, m) = 1\}$, pgcd dénotant le plus grand commun diviseur (autrement dit m et n sont premiers entre eux).

**[Q6 – 2 pts]** $L_1$ est-il rationnel ? Non rationnel ? Prouvez votre réponse.

**[Q7 – 2 pts]** $L_2$ est-il rationnel ? Non rationnel ? Prouvez votre réponse.

## D – langages algébriques (4 pts)

Soient les deux langages suivants :

- $L_1 = \{a^1 b a^2 b a^3 b \ldots a^n b \mid n \geq 1\}$
- $L_2 = \{w = a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N}, n \neq m\}$

**[Q8 – 2 pts]** Montrez que $L_1$ est algébrique.

**[Q9 – 2 pts]** Montrez que $L_2$ est algébrique.