Tous documents papier et appareils électroniques **interdits**.

n° de copie :

Durée : 1H00

Le barème est donné à titre **indicatif**.
Répondez directement sur le sujet. Vous glisserez le sujet rempli dans une copie double d'examen, sur laquelle vous mettrez votre nom sous pli cacheté, et vous reporterez le numéro de copie sur le sujet.

[Q1 – 2 pts] Soit $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Soit $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ est un multiple de 3 en représentation décimale (base 10)$\}$.
Par exemple, $1 \notin L_1$, $3 \in L_1$, $12 \in L_1$, $13 \notin L_1$.
Construisez un automate à états finis déterministe M_1 tel que $L(M_1) = L_1$.

[Q2 – 4 pts] Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate à états fini non déterministe quelconque.
A partir de M, on définit $M' = (K', \Sigma, \Delta', s', F')$ tel que $L(M') = \{w \mid w^R \in L(M)\}$, w^R dénotant le mot miroir (*reverse*) de w.

a) Définissez formellement M'.

b) Construisez l'automate (non déterministe) M_2 acceptant le langage $(a \cup b)^* (ab \cup ba)$

c) A partir de M_2 et de la définition du a), construisez M_2' tel que $L(M_2') = \{w \mid w^R \in L(M_2)\}$.

[Q3 – 4 pts] On rappelle le lemme de l'étoile :

Soit L un langage rationnel. L est donc reconnu par un automate M à k états.
$\forall$ $z \in L$, $|z| \geq k$, $\exists$ $u, v, w \in \Sigma^*$ tels que $z = uvw$, $|uv| \leq k$, $|v| > 0$ et pour tout $i \geq 0$, $uv^iw \in L$.

A l'aide du lemme de l'étoile, montrez que $L_3 = \{a^nb^nc^m \mid n,m \in \mathbf{N}\}$ est non rationnel.

n° de copie :

[Q4 – 5 pts] Soit L_4 le langage défini par l'expression rationnelle (abb ∪ baa)*.

a) Calculez les classes d'équivalence de la relation $\sim_{L4}$.

b) On rappelle que, pour un langage L, l'automate standard est l'automate

$$M = (\{ [x], x \in \Sigma^* \}, \Sigma, \delta, [e], \{ [x], x \in L \}) \text{ avec } \delta \text{ définie par } \delta([x], a) = [xa].$$

Déduisez du a) l'automate standard correspondant à L_4.

[Q5 – 5 pts] Soit $L_5 = \{ a^n b^{n+m} c^m \mid n,m \geq 0 \}$.

a) Construisez la grammaire algébrique permettant de générer L_5.

b) Construisez l'automate à pile reconnaissant L_5.