

LF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2023 – 2024

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr



CM 2

ALPHABETS ET LANGAGES

Alphabets et langages

Mot

- **Alphabet** : *ensemble fini, non vide*, de symboles
Généralement noté Σ
- **Mot** ou **chaîne** (ang. *string*) sur un alphabet Σ :
suite finie d'éléments de Σ
- On note Σ^* l'ensemble de **tous** les mots (y compris le mot vide) définis sur Σ

Alphabets et langages

Mot

- **Longueur** : nombre de symboles d'un mot
- Deux mots u et v sont **égaux** ssi
 - ils ont même longueur
 - $\forall i \in \{1, \dots, |u|\} : u_i = v_i$

Alphabets et langages

Mot

- **Concaténation** de 2 mots u et v de Σ^* : mot noté uv et défini par :
 - $u = u_1u_2\dots u_n, v = v_1v_2\dots v_n \rightarrow w = u_1\dots u_nv_1\dots v_n$
 - $\forall i \in \{1, |u|\} \quad (uv)_i = u_i$
 - $\forall i \in \{|u|+1, \dots, |u|+|v|\} \quad (uv)_i = v_{i-|u|}$
- **Propositions**
 - la concaténation est régulière à droite et à gauche
 - $wu = wv \Rightarrow u = v$
 - $uw = vw \Rightarrow u = v$
 - $|uv| = |u| + |v|$

Alphabets et langages

Mot

- **Facteur gauche** de w : mot u tel que $uv = w$
- **Facteur droit** de w : mot v tel que $uv = w$
- **Facteur** de w : mot u tel que il existe v et v' tels que $vuv' = w$
- **Miroir (Reverse)**
 - Fonction miroir $_R : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ définie par récurrence :
 - w tq $|w| = 0 : w^R = \varepsilon^R = \varepsilon$
 - w tq $|w| > 0 : \exists a \in \Sigma$ tq $w = au$
et $w^R = (au)^R = u^R a$
- **Propriété**
 - $\forall u, v \in \Sigma^* : (uv)^R = v^R u^R$

Alphabets et langages

Langage

- Langage sur Σ : *ensemble* de mots sur Σ
- Remarques de cardinalité
 - Σ fini
 - Σ^* infini dénombrable (rappel : dont on peut énumérer les éléments)
 - $P(\Sigma^*)$ est infini non dénombrable
- Opérations sur les langages
 - \cup, \cap, \neg (complément), $\setminus \Rightarrow$ comme d'habitude
(complément : $\neg A = \Sigma^* \setminus A$)
 - Concaténation : $L_1 \subset \Sigma^*, L_2 \subset \Sigma^*$
 - $L = L_1.L_2$ ou L_1L_2
est défini par $L = \{w \mid \exists w_1 \in L_1 \text{ et } \exists w_2 \in L_2 : w = w_1w_2\}$
 - Clôture de Kleene (Kleene star) ou étoile de L
 - $L^* = \{w \in \Sigma^* \mid \exists k \in \mathbb{N}, \exists w_1, w_2, \dots, w_k \in L : w = w_1w_2\dots w_k\}$

Représentation finie des langages

- Langages définis par
 - Éléments de base :
 - L'ensemble \emptyset
 - Le mot vide ε
 - Les singletons sur Σ
 - Opérations :
 - La concaténation de langages
 - La réunion de deux langages
 - La fermeture de Kleene
- De tels langages sont appelés **langages rationnels**

Représentation finie des langages

- Description et manipulation des langages **rationnels**
 - **Génération** *Grammaires régulières*
 - Un moyen de générer un langage
 - **Reconnaissance** *Automates finis*
 - Un moyen de décider l'appartenance
 - Caractérisation **algébrique** *Expressions régulières*
 - Notations et équations *Systèmes*

Représentation des langages

- Description et manipulation des langages
 - Génération *Grammaires*
 - Un moyen de générer un langage
 - Reconnaissance *Automates*
 - Un moyen de décider l'appartenance
 - Caractérisation algébrique
 - Notations et équations