LF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2023 – 2024

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 4

AUTOMATES À ÉTATS FINIS

Automates à états finis

- Automate ou Machine
  - *Ang. Automaton / Machine*
- Automates ou Machines
  - *Ang. Automata / Machines …*

- Automates (à états) finis déterministes
  - *Ang. Deterministic Finite Automata (DFA)*
- Automates (à états) finis non déterministes
  - *Ang. Nondeterministic Finite Automata (NFA)*
- Automates à pile
  - *Ang. Pushdown Automata (PDA)*
- Machines de Turing
  - *Ang. Turing Machines*

Automates à états finis

- Exemple concret
  - Machine à café dans le hall du déambu (pas sans contact)
  - Barrière de péage du périph' (pas liber-t …)
  - Laverie (pas sans contact)
  - …

Automates finis déterministes

- Simulation d'une machine très simple :
  - Mémorisation d'un état
  - Programme sous forme de graphe étiqueté indiquant les transitions possibles

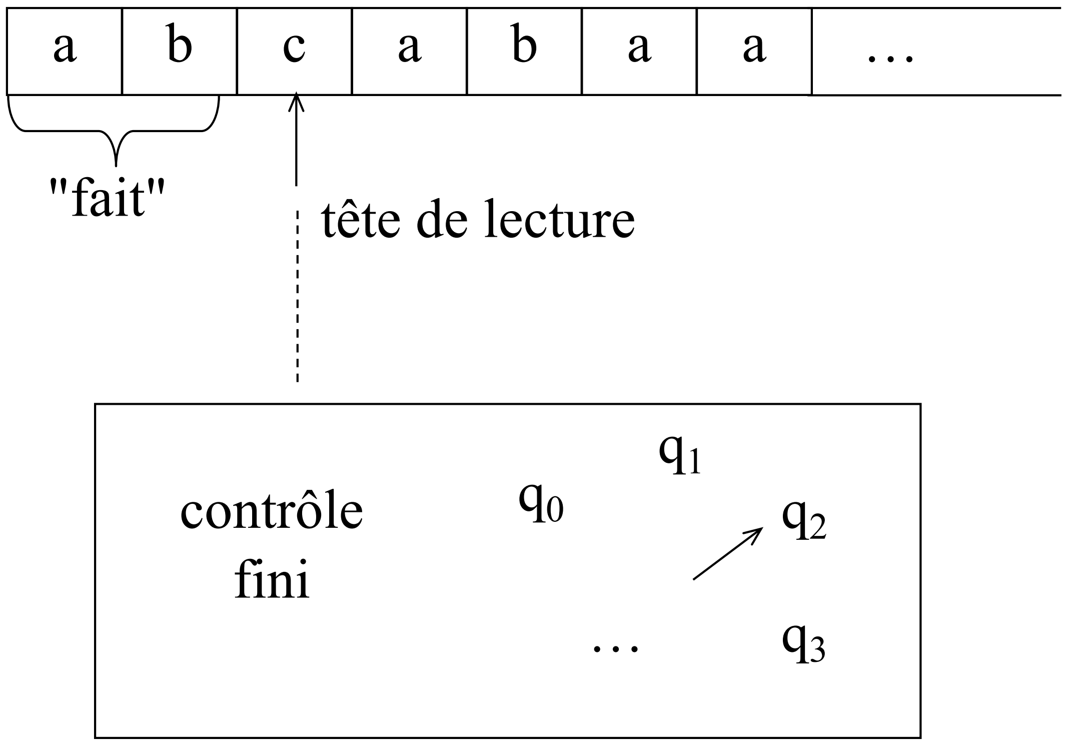
- Cette machine lit un mot en entrée

- Ce mot décrit une suite d'actions et progresse d'état en état

- Si le dernier état est un état acceptant et que le mot a été entièrement lu, on dit que le mot est accepté

$\Rightarrow$ Un automate permet de reconnaître un langage

Automates finis déterministes



- Un état dépend uniquement
  - De l'état précédent
  - Du symbole lu

Automates finis déterministes

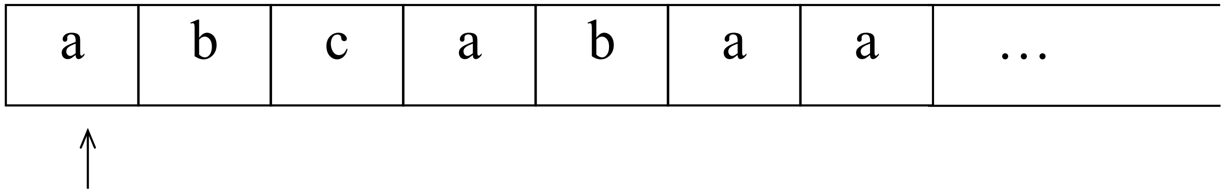
- Un automate déterministe fini est le quintuplet $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ où :
  - K : ensemble fini (non vide) d'états
  - Σ : alphabet (ensemble non vide de symboles)
  - δ : fonction de transition : $K \times \Sigma \rightarrow K$

    $\delta(q, \sigma) = q'$ (q' : état de l'automate après avoir lu la lettre σ dans l'état q)
  - s : état initial : $s \in K$
  - F : ensemble des états finaux (acceptants) : $F \subset K$

- Si δ est une application, alors l'automate est complet

Automates finis déterministes

- Exécution



  La machine
  - lit a (qui est ensuite oublié),
  - passe dans l'état $\delta(s, a)$ et avance la tête de lecture,
  - répète cette étape jusqu'à ce que tout le mot soit lu ou plus de transition applicable

- La partie déjà lue du mot ne peut pas influencer le comportement à venir de l'automate

  → d'où la notion de configuration

Automates finis déterministes

- Configuration
  - état dans lequel est l'automate
  - mot qui lui reste à lire (partie droite du mot initial)

- Formellement

  une configuration est un élément quelconque de $K \times \Sigma^*$

- Exemple

  sur l'exemple précédent, la configuration est $(q_2, cabaa)$

Automates finis déterministes

- Le fonctionnement d'un automate est décrit par le passage d'une configuration C_1 à une configuration C_2

- C_2 est déterminée
  - en lisant un caractère
  - et en appliquant la fonction de transition

- Exemple
  - $(q_2, cabaa)$ → $(q_3, abaa)$ si $\delta(q_2, c) = q_3$

Automates finis déterministes

- Un automate M détermine une relation binaire $\vdash_M$ entre configurations définie par :
  - $\vdash_M \; \subset (K \times \Sigma^*)^2$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ ssi $\exists\, \sigma \in \Sigma$ tel que $w = \sigma w'$ et $\delta(q, \sigma) = q'$

- On dit alors qu'on passe de (q, w) à (q', w') en une étape

Automates finis déterministes

- On note $\vdash_M^*$ la fermeture transitive réflexive de $\vdash_M$:

  $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ signifie qu'on passe de (q, w) à (q', w') en zéro, une ou plusieurs étapes

- $\boxed{\text{Un mot } w \text{ est accepté par } M \text{ ssi } (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon), \text{ avec } q \in F}$

- Le langage accepté par M est l'ensemble de tous les mots acceptés par M

  Ce langage est noté $L(M)$

Automates finis déterministes

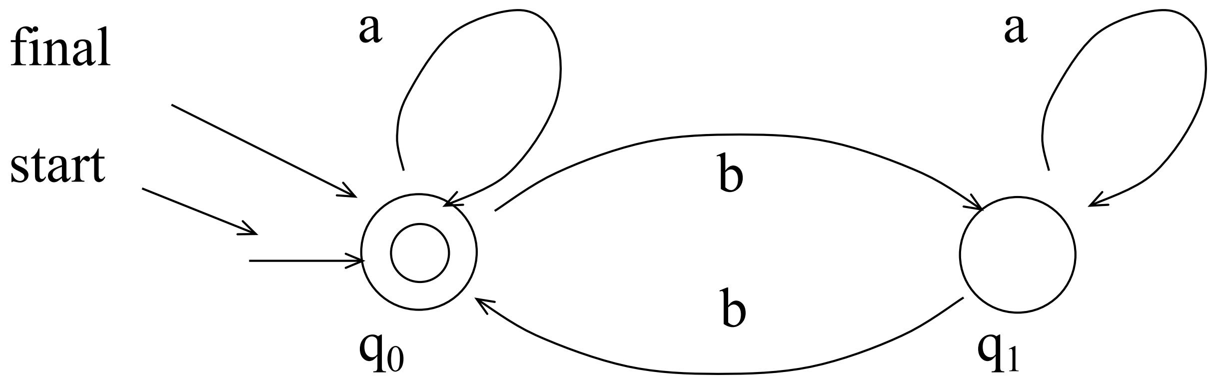
- Exemple $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$
  - $K = \{q_0, q_1\}$
  - $\Sigma = \{a, b\}$
  - $s = q_0$
  - $F = \{q_0\}$

δ :

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_1
q_1	b	q_0

$\Leftrightarrow$

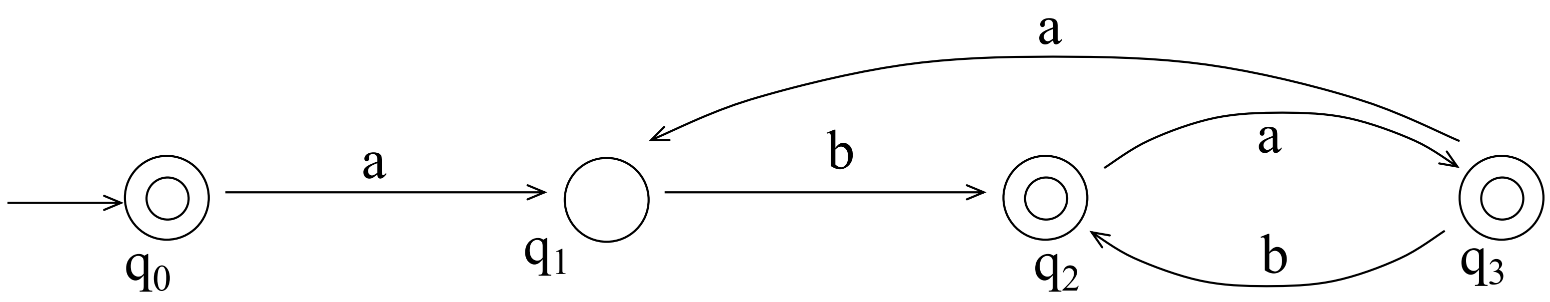
	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0



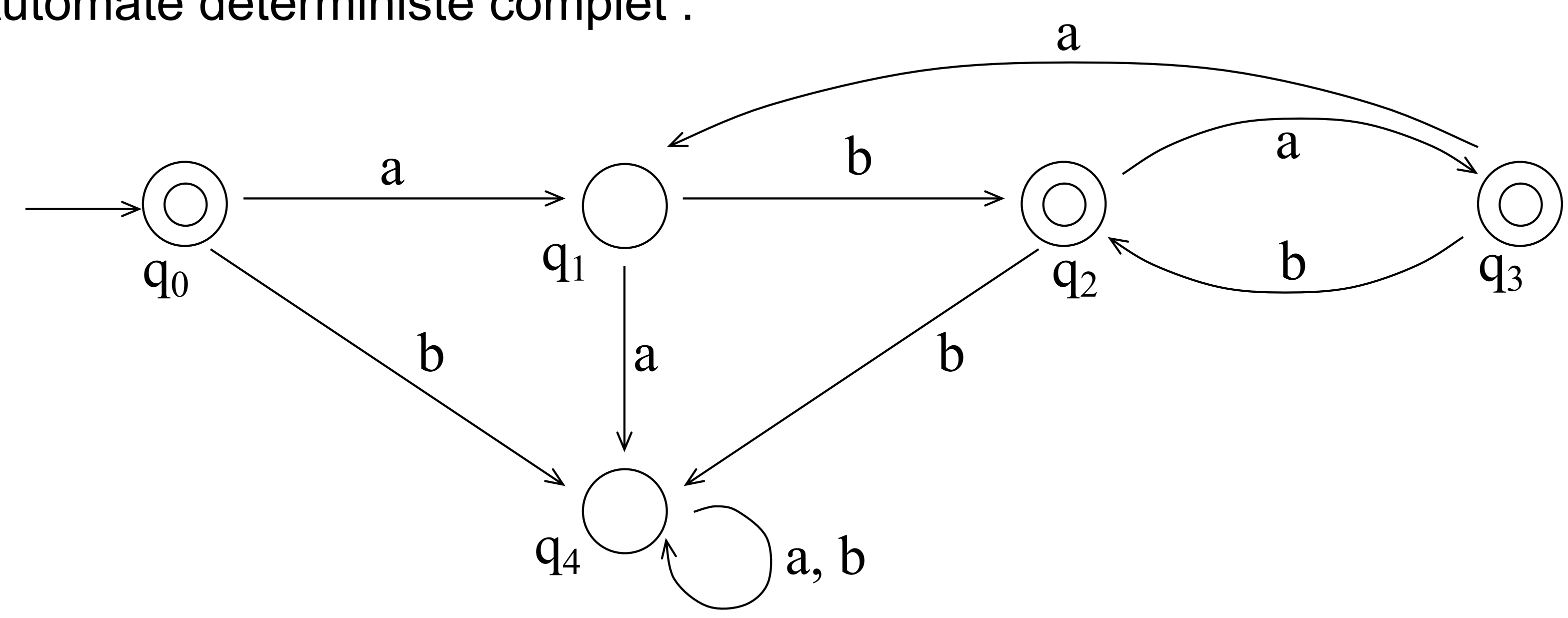
Automates finis déterministes

- $L = (ab \cup aba)^*$

  Automate déterministe non complet :



  Automate déterministe complet :

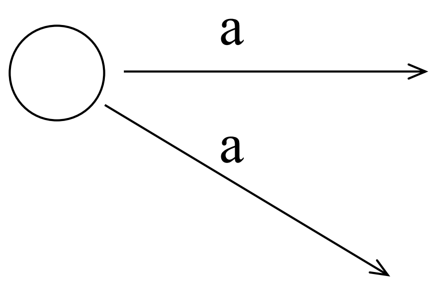


Automates finis non déterministes

- Remplacer la fonction $\vdash_M$ (ou δ) par une relation

- Une relation, c'est beaucoup plus général qu'une fonction
  → on a ainsi une classe plus large d'automates

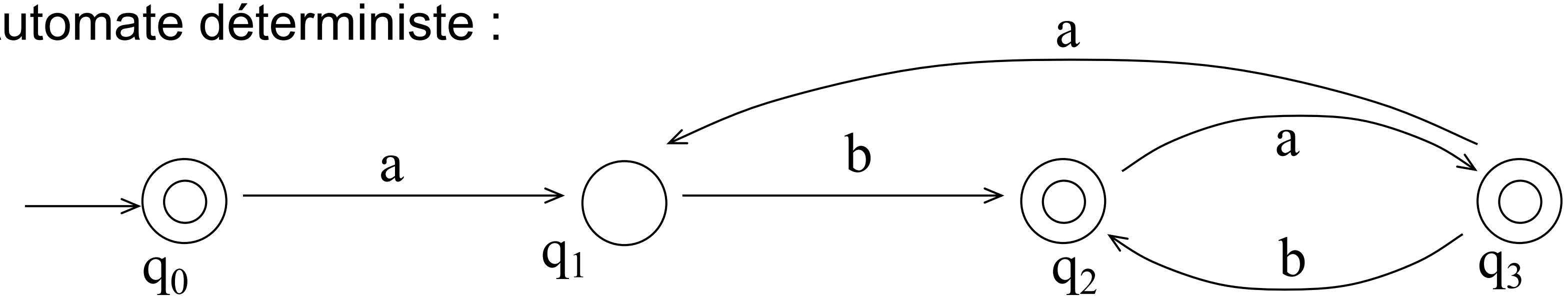
$\Rightarrow$ Dans un état donné, on pourra avoir :



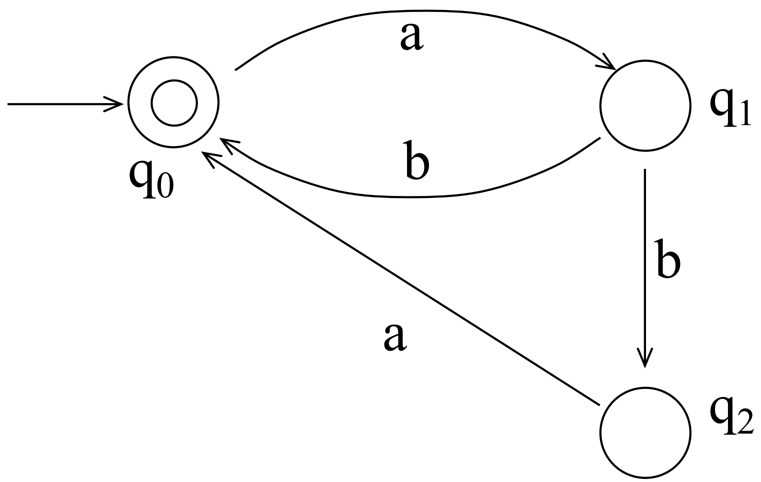
Automates finis non déterministes

- $L = (ab \cup aba)^*$

  Automate déterministe :



  Automate non déterministe :



Automates finis non déterministes

- Un automate non déterministe fini est le quintuplet $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ où
  - K : ensemble fini (non vide) d'états
  - Σ : alphabet (ensemble non vide de symboles)
  - Δ : relation de transition : $K \times \Sigma \times K$

    $(q, \sigma, q') \in \Delta$: σ –transition ($\sigma \in \Sigma$)
  - s : état initial : $s \in K$
  - F : ensemble des états finaux (acceptants) : $F \subset K$

- hormis Δ, le reste est identique à la formulation déterministe

- Δ peut-être définie comme une application $K \times \Sigma \rightarrow P(K)$

Automates finis non déterministes

- Une configuration est un élément de K $\times$ Σ^*.

- Un automate M détermine une relation binaire $\vdash_M$ entre configurations définie par :
  - $\vdash_M \subset (K \times \Sigma^*)^2$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ ssi $\exists\, \sigma \in \Sigma$ tel que $w = \sigma w'$ et $(q, \sigma, q') \in \Delta$

Automates finis non déterministes

- $\vdash_M$ est une relation et non plus une fonction (automates déterministes)

  Pour une configuration (q, w), il peut y avoir plusieurs configurations (q', w') (ou aucune) tel que $(q, w) \vdash_M (q', w')$

- On note comme avant $\vdash_M^*$ la fermeture transitive réflexive de $\vdash_M$

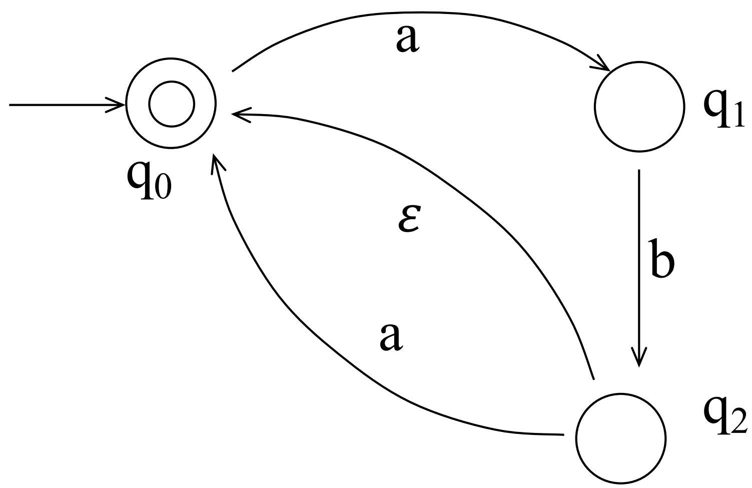
- Un mot w est accepté par M ssi $(s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$, avec $q \in F$

- $L(M)$ est le langage de tous les mots acceptés par M

Automates finis non déterministes avec transitions spontanées

- Ajout de transitions vides
  - Il est possible d'étiqueter une flèche par le symbole ε.

- Autre formulation encore plus intuitive (?) de l'automate précédent :



Automates finis non déterministes avec transitions spontanées

- Un automate non déterministe fini avec transitions spontanées est le quintuplet $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ où :
  - K : ensemble fini (non vide) d'états
  - Σ : alphabet (ensemble non vide de symboles)
  - Δ : relation de transition : $K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$

    $(q, \sigma, q') \in \Delta$: σ –transition ($\sigma \in \Sigma$)
  - s : état initial : $s \in K$
  - F : ensemble des états finaux (acceptants) : $F \subset K$

- hormis la relation, la définition est identique à la formulation déterministe et à la formulation non déterministe

Automates finis non déterministes avec transitions spontanées

- Si $(q, \varepsilon, q') \in \Delta$: on a une ε −transition (transition spontanée)
  → On passe de q à q' sans lire de symbole dans le mot courant.

- Une configuration est un élément de $K \times \Sigma^*$

- M décrit une relation binaire entre configurations qu'on note $\vdash_M$:

  $(q, w) \vdash_M (q', w')$

  ssi il existe un mot d'au plus une lettre $u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

  tel que $w = uw'$

  et $(q, u, q') \in \Delta$

Automates finis non déterministes avec transitions spontanées

- $\vdash_M$ est une relation et non plus une fonction (automates déterministes)
  - (q, ε) peut être en relation avec une autre configuration (après une ε −transition)
  - pour une configuration (q, w), il peut y avoir plusieurs configurations $\vdash_M$ (ou aucune) telles que $(q, w) \vdash_M (q', w')$

- On note comme avant $\vdash_M^*$ la fermeture transitive réflexive de $\vdash_M$

- Un mot w est accepté par M ssi $(s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$, avec $q \in F$

- $L(M)$ est le langage de tous les mots acceptés par M

Retour sur les grammaires algébriques

- Théorème

  Un langage est rationnel si et seulement si il est engendré par une grammaire régulière

- Ce théorème exprime que tout langage rationnel est algébrique (et non l'inverse)

- On peut utiliser la preuve de ce théorème pour :
  - Passer d'un automate (déterministe ou non) à une grammaire
  - Passer d'une grammaire à un automate

Langages rationnels et grammaires algébriques

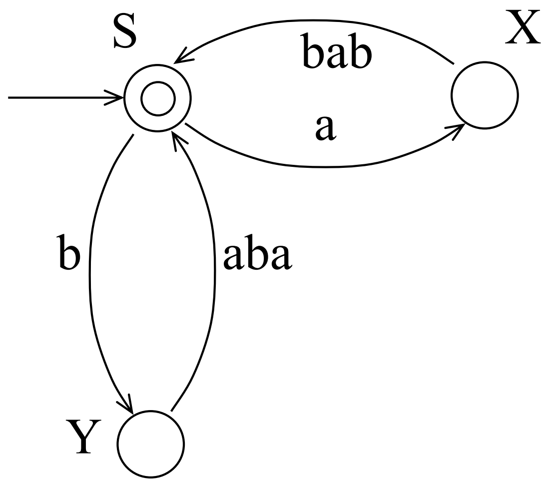
- Exemple ($G \rightarrow M$)

  $G = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire régulière avec :
  - $V = \{ S, X, Y \}$
  - $\Sigma = \{ a, b \}$
  - $R = \{ S \rightarrow aX \mid bY, X \rightarrow aS \mid a, Y \rightarrow bS \mid b \}$

- Soit M tel que $L(M) = L(G)$. Pour chaque non-terminal de G on crée un état dans M de la façon suivante :
  - Si $A \rightarrow wB \in R$ alors on crée dans M une transition de l'état A vers l'état B étiquetée par w
  - Si $A \rightarrow w \in R$ alors on crée dans M une transition de l'état A vers l'état F, où F est le seul état introduit dans M qui ne correspond à aucun non-terminal de G

Langages rationnels et grammaires algébriques

- Exemple ($M \rightarrow G$)
  Soit l'automate :



- Soit G une grammaire régulière telle que $L(G) = L(M)$. Pour chaque transition de M on crée une règle dans G de la façon suivante :
  - Pour toute transition de l'état p vers l'état q étiquetée par w, on crée la règle correspondante dans G : $P \rightarrow wQ$
  - Pour tout état final f de M, on crée dans G une règle d'effacement : $F \rightarrow \varepsilon$

Et maintenant ?

- Déterministe ou non déterministe ?
  - Même classe de langages reconnus
  - Donc équivalents

- Langages rationnels et langages reconnus par les automates finis ?
  - Même classe de langages

- Un langage est-il rationnel ?
  - Preuve de rationalité

- Un automate est-il minimal ?
  - Automate standard