LF – Théorie des langages formels
Sylvain Brandel
2023 – 2024
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 5

AUTOMATES À ÉTATS FINIS DÉTERMINISATION

Elimination du non-déterminisme

- Définition
  - 2 automates finis M et M' (déterministes ou non) sont équivalents

    ssi $\mathrm{L}(M) = L(M')$

- Théorème

  Pour tout automate non déterministe,

  il existe un automate déterministe équivalent,

  et il existe un algorithme pour le calculer

  Cet algorithme est appelé déterminisation d'un automate

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, \mathrm{F})$ un automate non déterministe

- Problème : déterminer $M' = (K', \Sigma, \delta', \mathrm{s}', \mathrm{F}')$ déterministe

- Démarche
  1) Méthode pour construire M'
  2) Montrer
     - M' déterministe (par construction : trivial)
     - M' équivalent à M

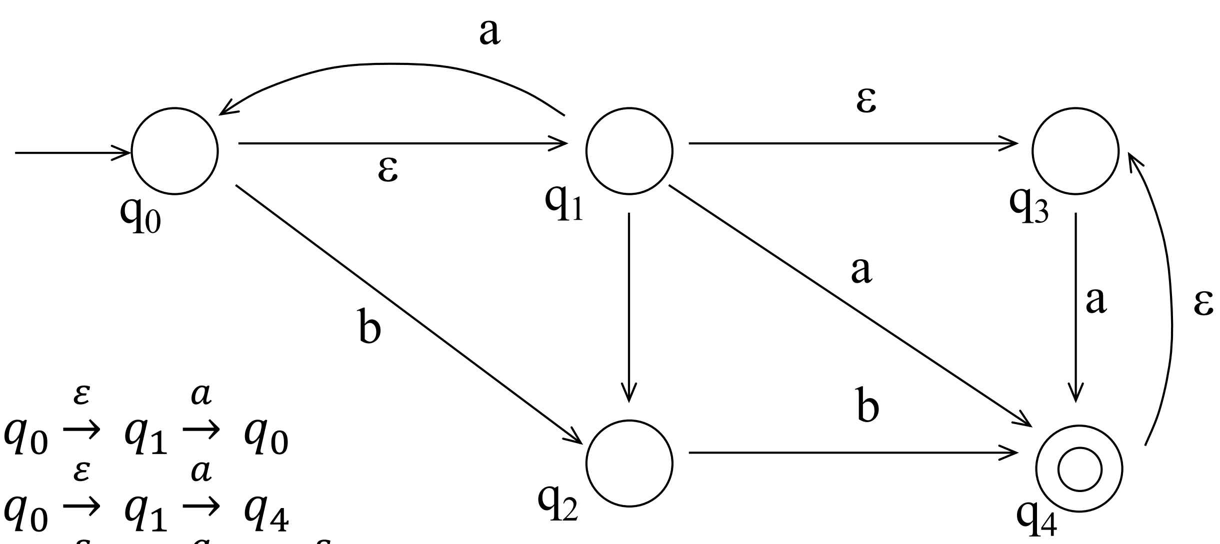
Elimination du non-déterminisme
Preuve

- L'idée est la suivante :
  - Pour toute lettre σ de Σ, on considère l'ensemble des états qu'on peut atteindre en lisant σ
  - On rassemble ces états et on considère des états étiquetés par des parties de K $(P(K))$
  - L'état initial de M' est l'ensemble des états atteignables en ne lisant aucune lettre
  - Les états finaux de M' sont les parties (atteignables) de $P(K)$ contenant au moins un état final de M

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Exemple



$$q_0 \xrightarrow{a} \quad q_0 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_0$$

$$q_4 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_4$$

$$q_3 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{\varepsilon} q_3$$

$$q_1 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1$$

$$q_2 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2$$

$$q_0 \xrightarrow{b} \quad q_2 \qquad q_0 \xrightarrow{b} q_2$$

$$q_4 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{b} q_4$$

$$q_3 \qquad q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{b} q_4 \xrightarrow{\varepsilon} q_3$$

état initial : $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Prise en compte des ε-transitions : ε-clôture
- Soit $q \in K$, on note $E(q)$ l'ensemble des états de M atteignables sans lire aucune lettre :

$$E(q) \;=\; \{p \in K : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

$E(q)$ est la clôture de $\{q\}$ par la relation binaire $\{(p, r) \mid (p, \varepsilon, r) \in \Delta\}$

- Construction de $E(q)$

$E(q) := \{q\}$
<u>tant que</u> il existe une transition $(p, \varepsilon, r) \in \Delta$ avec $p \in E(q)$ et $r \notin E(q)$
    $E(q) := E(q) \cup \{r\}$

Elimination du non-déterminisme

Preuve

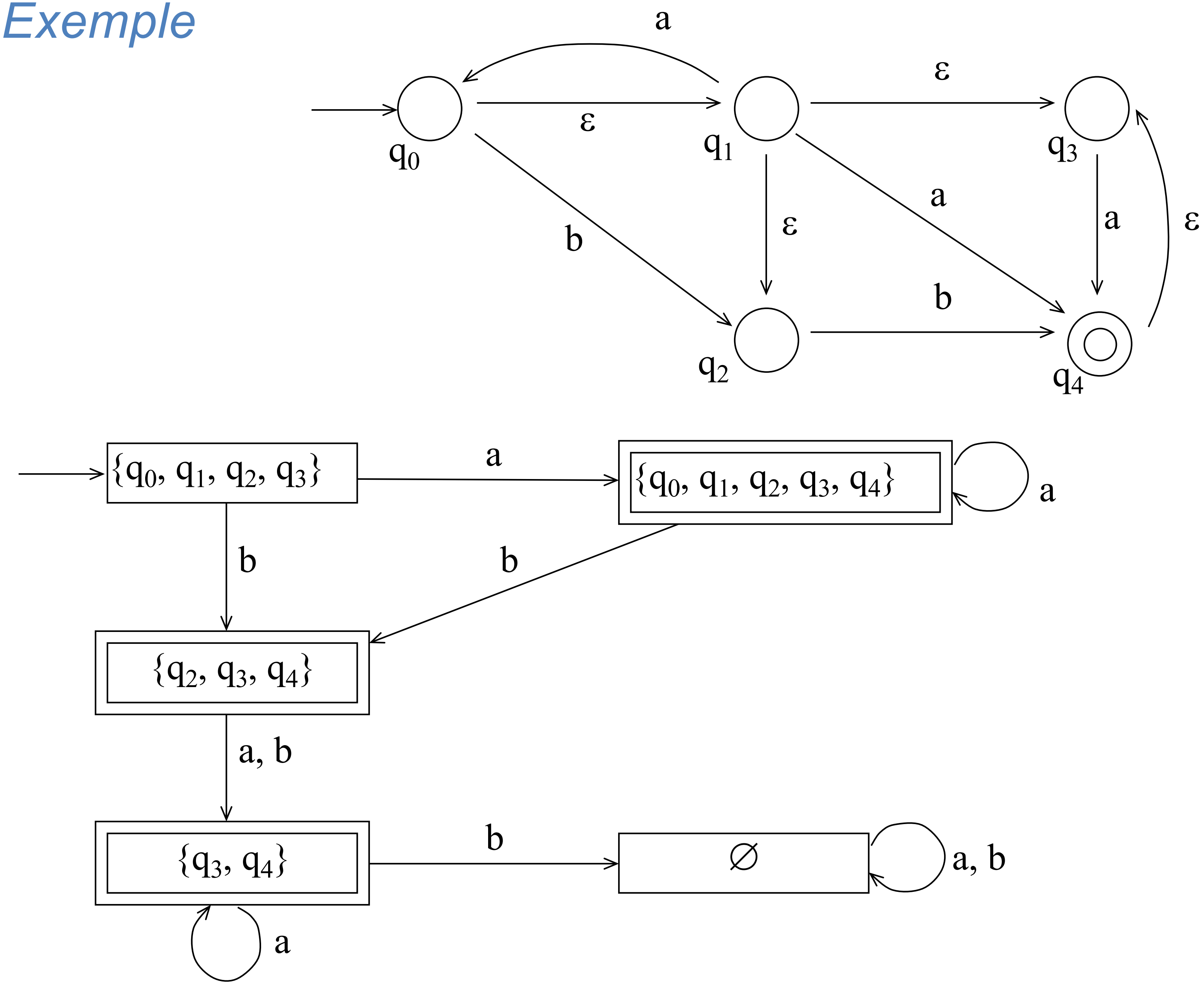
- On obtient donc $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$ déterministe
  - $K' = P(K)$
  - $s' = E(s)$
  - $F' = \{Q \subset K : Q \cap F \neq \emptyset\}$
  - $\delta' = P(K) \times \Sigma \rightarrow P(K)$

$$\forall\, Q \subset K, \forall\, a \in \Sigma,\ \ \delta'(Q, a) = \cup\ \{E(p) \mid q \in Q : (q, a, p) \in \Delta\}$$

$\delta'(Q, a)$: ensemble de tous les états de M dans lesquels M peut aller en lisant a (y compris ε)

Elimination du non-déterminisme

Exemple

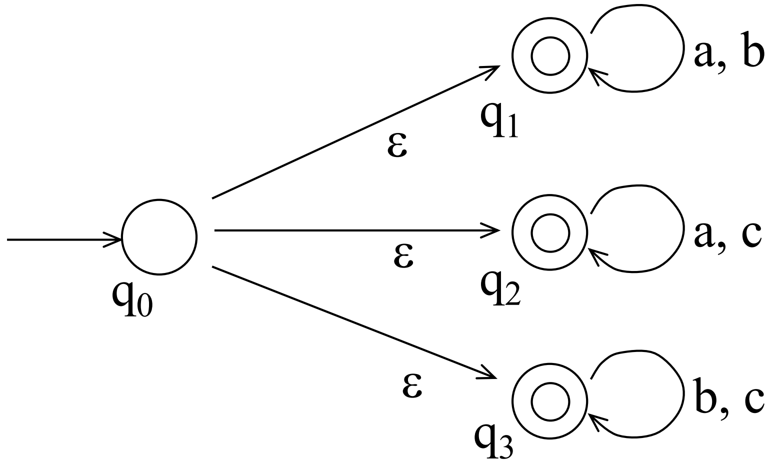


Elimination du non-déterminisme

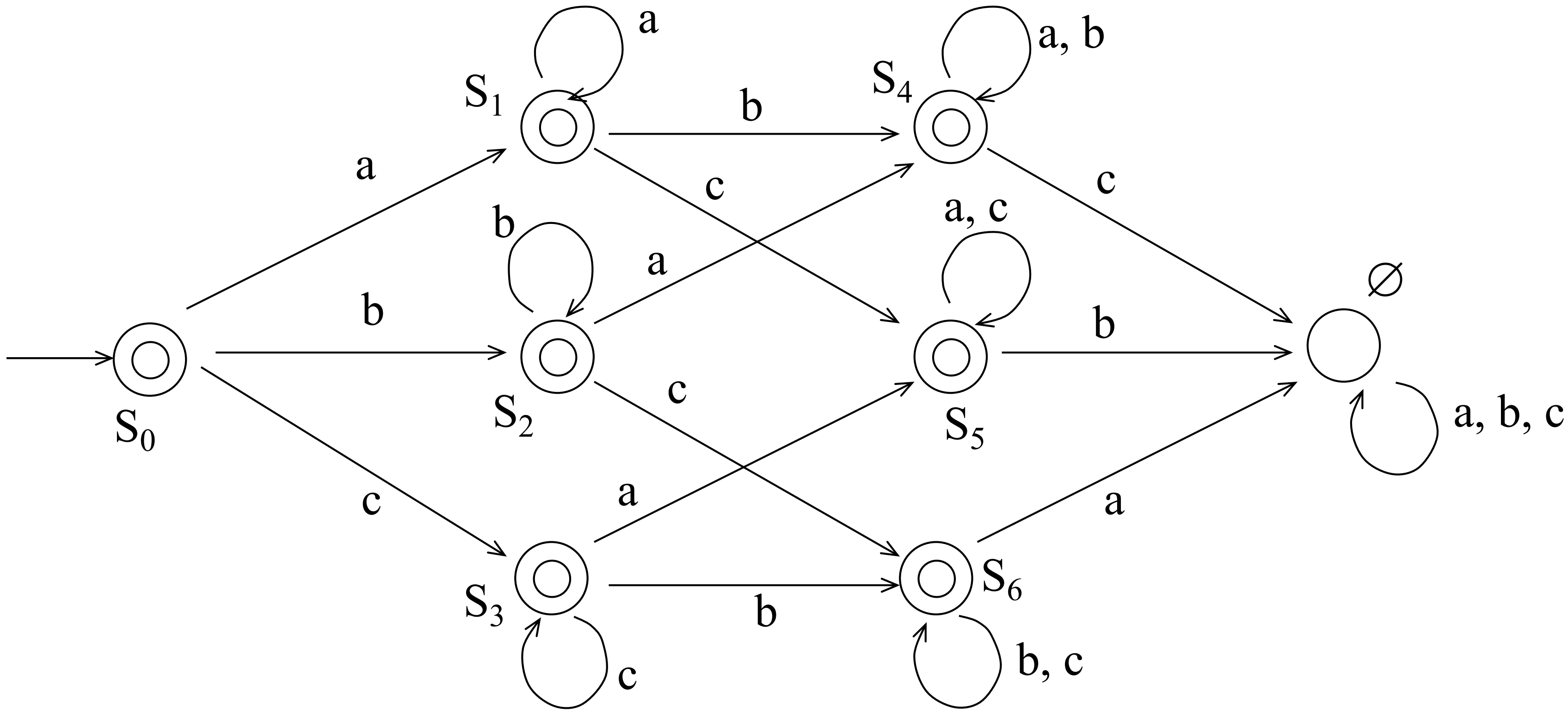
Autre exemple

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$L(M) = (a \cup b)^* \cup (b \cup c)^* \cup (a \cup c)^*$



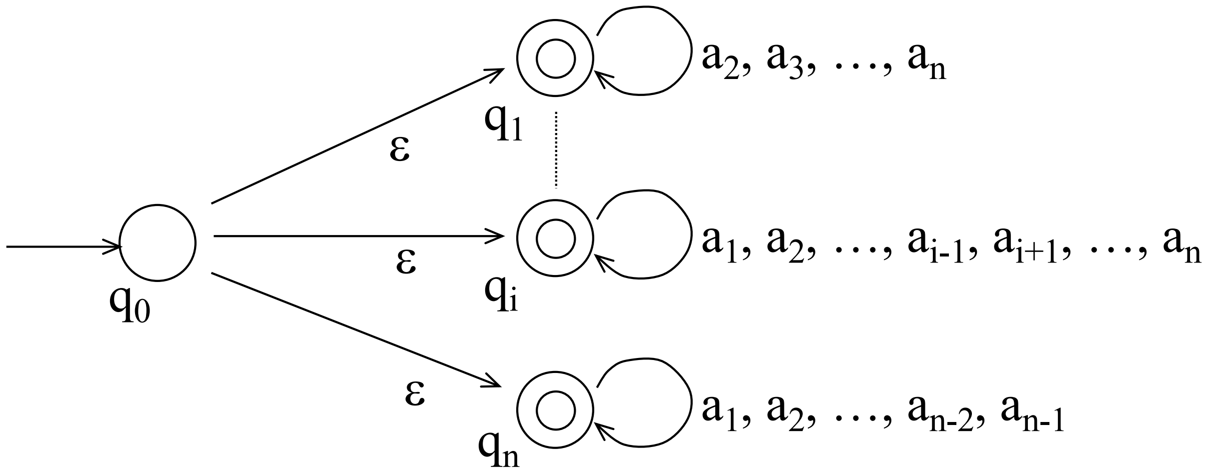
4 états



8 états

Elimination du non-déterminisme

Généralisation



$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, an\}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma - \{a_1\}$$

…

$$\Sigma_i = \Sigma - \{a_i\}$$

$$\rightarrow L(M) = \cup_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$$