LF – Théorie des langages formels
Sylvain Brandel
2023 – 2024
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 6

CARACTÉRISATION

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Propriété de stabilité des langages reconnus par des automates finis.

- Théorème

  La classe des langages acceptés par les automates finis est stable par :
    - *Union*
    - *Concaténation*
    - *Fermeture itérative*
    - *Complément*
    - *Intersection*

  $\downarrow$ *ordre de la démonstration*

- Preuve constructive
  – Construction de l'automate pour chaque opération

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Union

$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ → Même Σ

$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ → Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

→ $M_\cup : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$

$w \in L(M_\cup) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M (s_1, w) \vdash_M{}^* (f_1, \varepsilon)\ (f_1 \in F_1)$ ← L_1

ou

$(s, w) \vdash_M (s_2, w) \vdash_M{}^* (f_2, \varepsilon)\ (f_2 \in F_2)$ ← L_2

$\Leftrightarrow w \in L_1 \cup L_2$

→ $L(M_\cup) = L_1 \cup L_2$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Concaténation

$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ → Même Σ

$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ → Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

→ $M_c : \ (K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_i, \varepsilon, s_2) \mid f_i \in F_1\}, s_1, F_2)$

→ $L(M_c) = L_1 L_2$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Etoile de Kleene

$$L_1 \ = \ L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

Posons s tel que $s \ \notin \ K_1$

→ $M_K \ : \ (K_1 \cup \{s\}, \Sigma, \Delta_1 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \ \cup \ \{(f_i, \varepsilon, s_1) \mid f_i \in F_1\}, s, F_1 \ \cup \ \{s\})$

→ $L(M_K) = {L_1}^*$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Complément

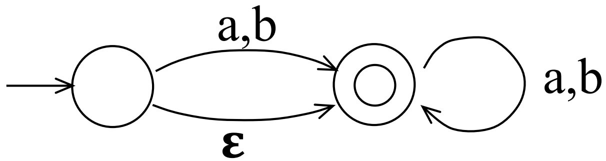
$$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$

$$\rightarrow M_{\neg} : (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, \neg F_1) \; avec \; \neg F_1 = K_1 - F_1$$

$$\rightarrow L(M_{\neg}) = \neg L_1$$

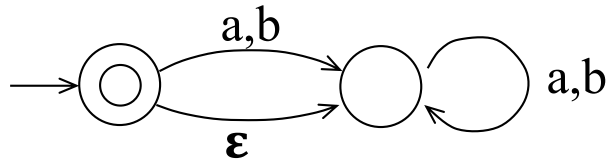
Attention M_1 doit être déterministe et complet

ex non det. :



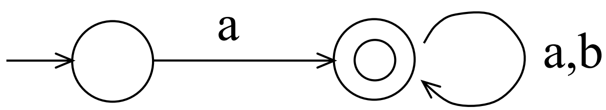
L(M) = (a ∪ b)*

➔



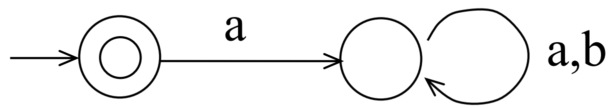
L(M¬) = {ε}

ex non complet :



L(M) = a (a ∪ b)*

➔



L(M¬) = {ε}

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Intersection

$$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$
$$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

→ Même Σ

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

- Deux méthodes :
  - $L(M_1) \cap L(M_2) = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$
  - Automate produit, avec M_1et M_2 déterministes et complets
    - $M_\cap$: $(K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \; et \; (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\},$
      $(s_1, s_2), F_1 \times F_2)$
    - Quadratique en le nombre d'états

→ $L(M_\cap) = L_1 \cap L_2$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

- Retour sur l'union

$$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$
$$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

→ Même Σ

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

→ $M_\cup : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$

- Autre méthode :
  - Automate produit, avec M_1 et M_2 déterministes et complets
    - $M_\cup : (K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \; et \; (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2)$
    - Quadratique en le nombre d'états

→ $L(M_\cup) = L_1 \cup L_2$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

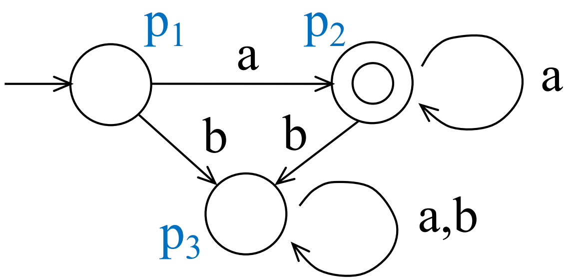
- Automate produit – intersection

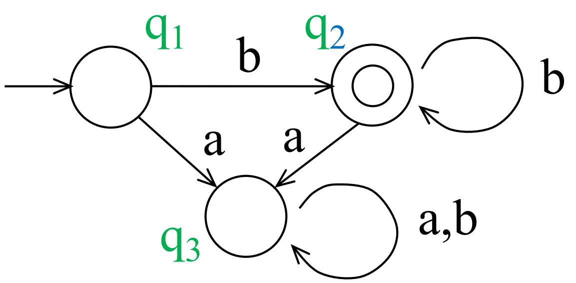
$$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$
$$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

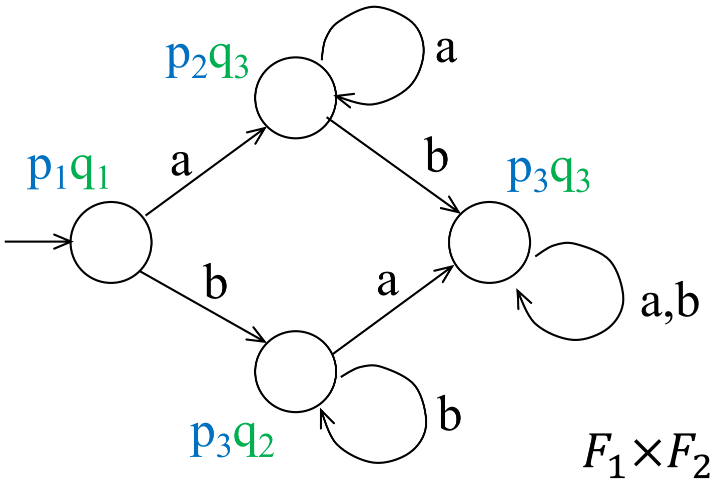
→ Même Σ

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

- Automate produit, avec M_1 et M_2 déterministes et complets
  - $M_\cap$: $(K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \; et \; (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$







$F_1 \times F_2 = \emptyset$

Lien avec les langages rationnels
Stabilité

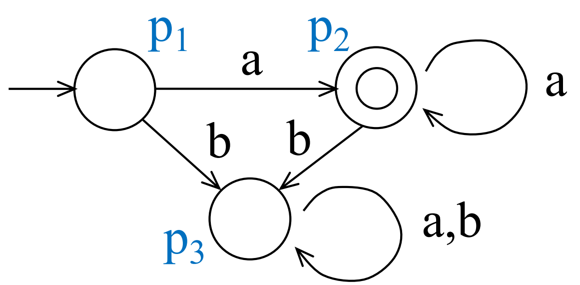
- Automate produit – union

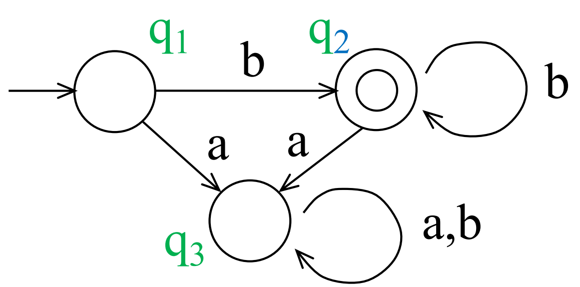
$$L_1 = L(M_1) \qquad M_1 = (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$$
$$L_2 = L(M_2) \qquad M_2 = (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$$

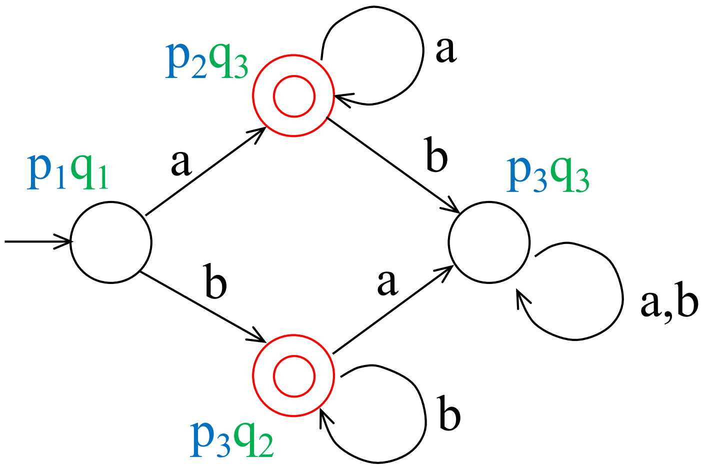
→ Même Σ

→ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

  – Automate produit, avec M_1 et M_2 déterministes et complets
    - $M_\cup$: $(K_1 \times K_2, \Sigma, \{((p_1, p_2), \sigma, (q_1, q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1 \; et \; (p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}, (s_1, s_2), F_1 \times K_2 \cup K_1 \times F_2)$







Lien avec les langages rationnels
Inclusion des classes de langages

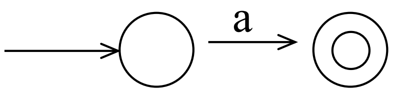
- Théorème

  La classe des langages acceptés par les automates finis contient les langages rationnels.

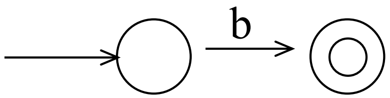
- Exemple

  $(ab \cup aba)^*$

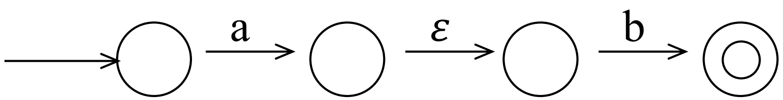
a



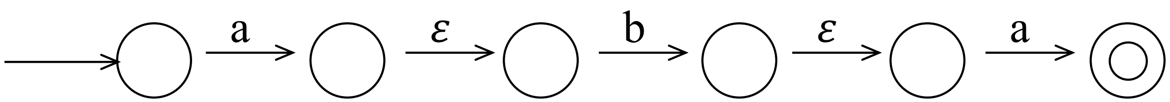
b



ab



aba



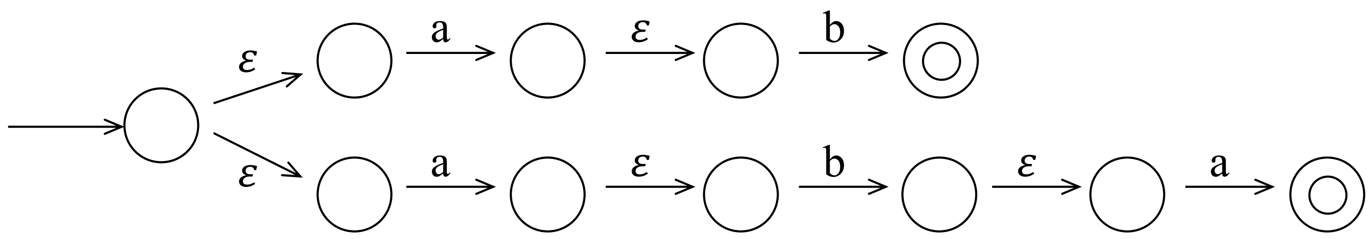
Lien avec les langages rationnels

Inclusion des classes de langages

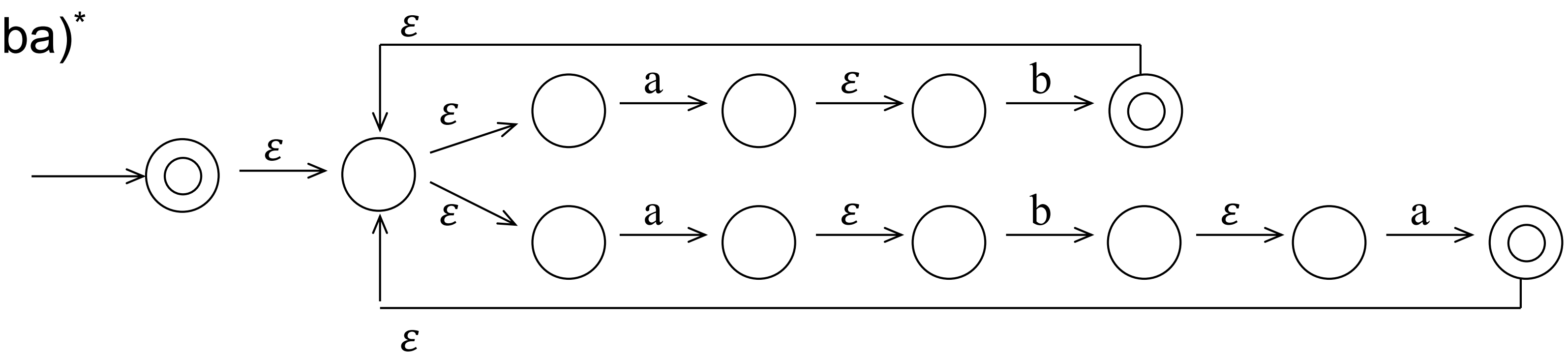
- Exemple

  $(ab \cup aba)^*$

$ab \cup aba$



$(ab \cup aba)^*$



Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

- Théorème

  Un langage est rationnel ssi il est accepté par un automate fini.

- Preuve

On suppose qu'on a numéroté (ordonné) les états.
Soit $M = (K, \Sigma, \Delta\ s, F)$ un automate fini (déterministe ou non). $|K| = n$.

$$K = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \quad s = q_1$$

Le langage reconnu par M est la réunion de tous les langages reconnus en parcourant tous les chemins possibles dans le graphe.

→ À chaque chemin allant de s à f $(\in F)$, on associe le langage trouvé.

Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- On pose $R(i,j,k)$ = l'ensemble des mots obtenus par lecture de l'automate M
  - en partant de l'état q_i,
  - en arrivant dans l'état q_j (avec le mot vide),
  - en ne passant que par des états intermédiaires dont le numéro est ≤ k.

- $R(i,j,k)$ est un langage

- $R(i,j,k) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)$ *sans passer par des états intermédiaires dont le numéro est* $> k\}$

$$R(i,j,n) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, \varepsilon)\}$$

$$L(M) = \bigcup_{i \mid q_i \in F} R(1,i,n)$$

Lien avec les langages rationnels

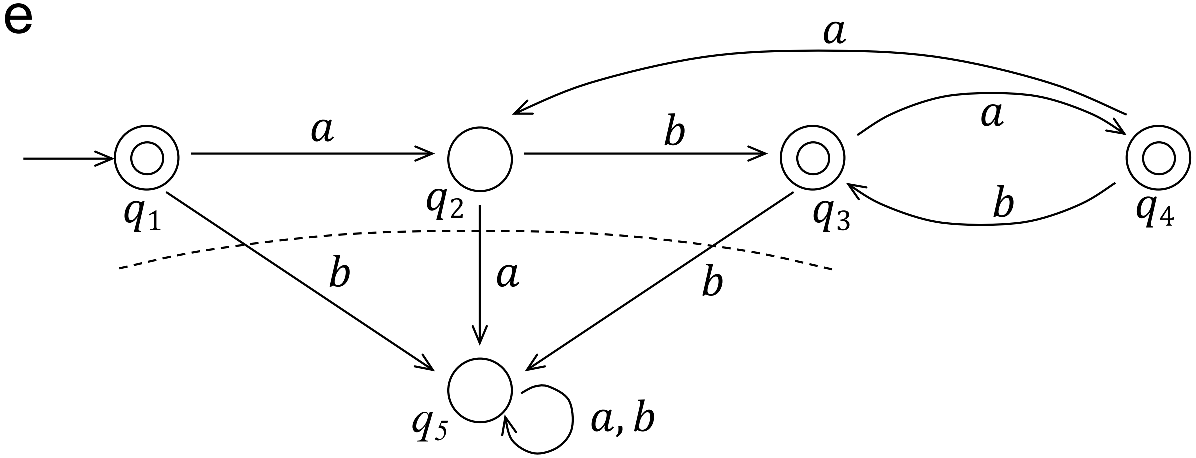
Caractérisation des langages rationnels

- $R(i, j, k)$ est un langage rationnel dont on peut calculer la représentation par récurrence sur k.

- Preuve

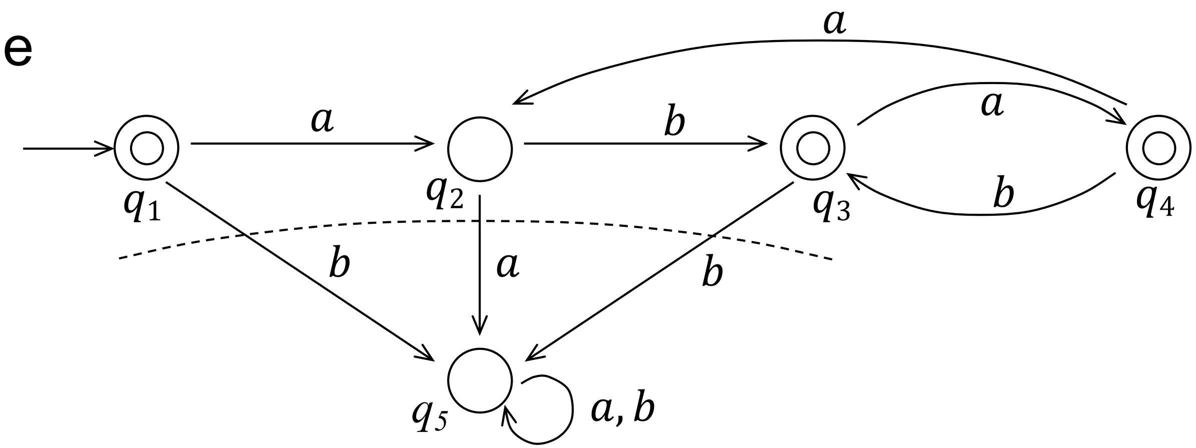
$$R(i,j,k) \;=\; R(i,j,k-1) \cup R(i,k,k-1).\left(R(k,k,k-1)\right)^{*}.R(k,j,k-1)$$

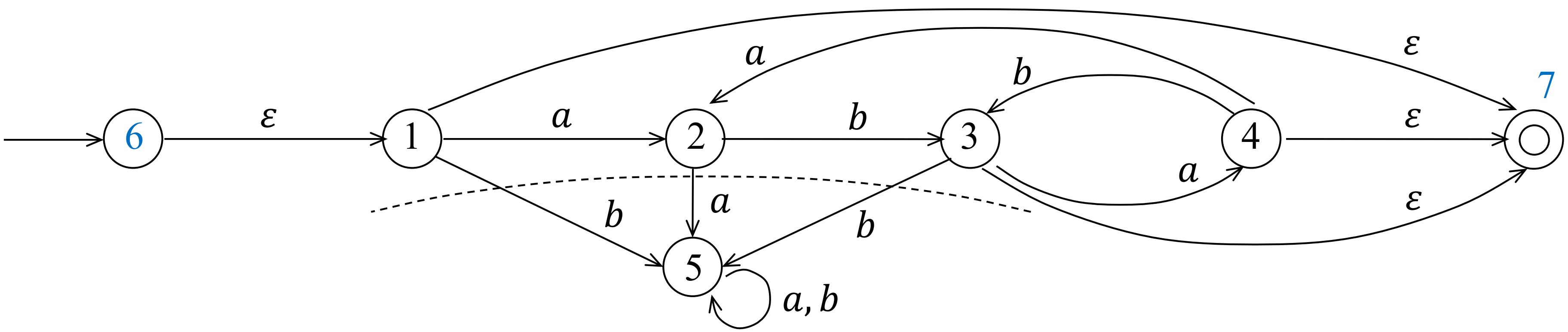
- Exemple



Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

- Forme spéciale de M ($L(M)$ inchangé) :
  - Un seul état final f
  - Si $(p, \sigma, q) \in \Delta$, alors $p \neq f$ et $q \neq s$ (pas de retour de f ou vers s)
- $s = q_{n-1}$ et $f = q_n$, alors $L(M) = R(n-1, n, n)$
- Exemple





Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

- Exemple
  - $R(i,j,0)$ → étiquettes sur les flèches.
  - Principe : calculer $R(6,7,7)$

$R(6,7,7)$ $= R(6,7,6) \cup R(6,6,6)\, R(6,6,6)^*\, R(6,7,6)$

$= R(6,7,5) \cup R(6,5,5)\, R(5,5,5)^*\, R(5,7,5) \cup$ ...

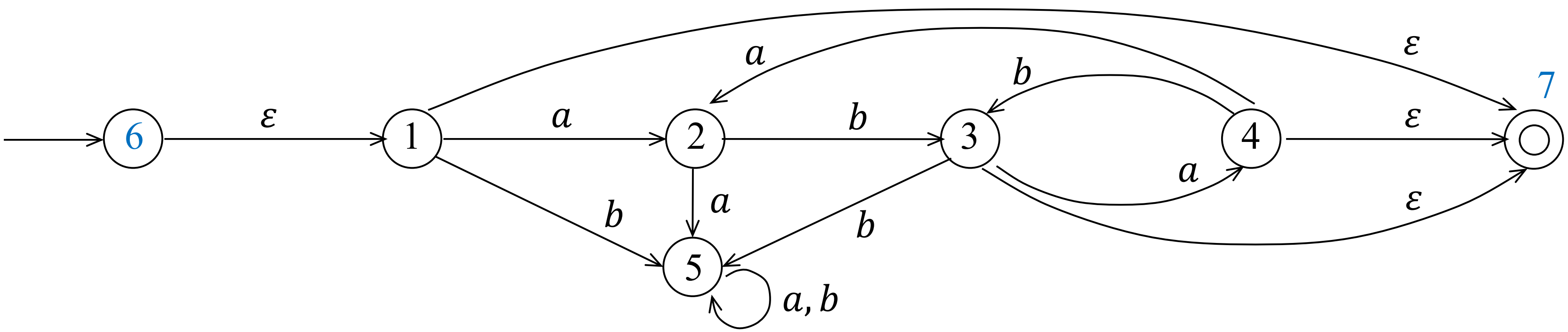
$= \dots$

Fastidieux $\Rightarrow$ on calcule les $R(i,j,k)$ de proche en proche.

→ On supprime q_1 (ce qui revient à calculer $R(i,j,1)$)

→ On supprime q_2 (ce qui revient à calculer $R(i,j,2)$)

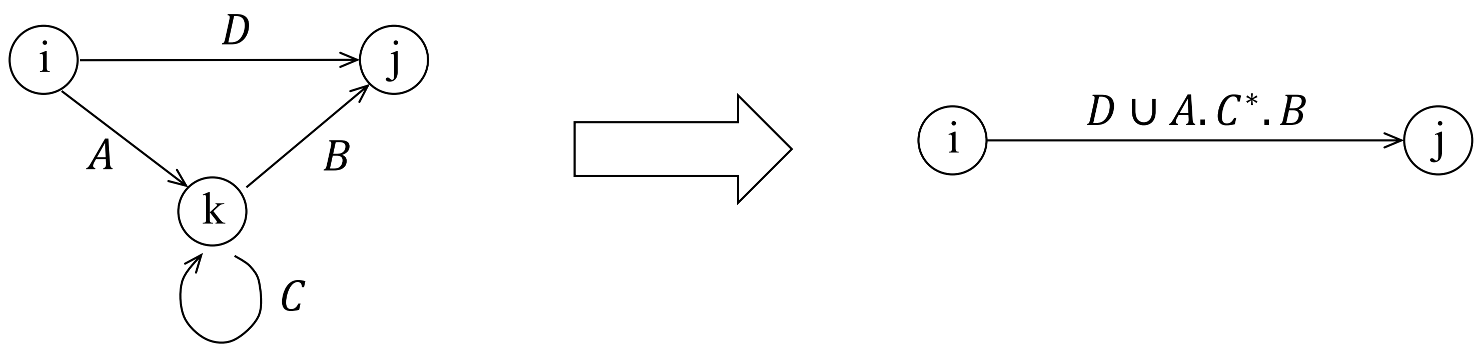
…



Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Règles de suppression d'un état q_k
  - Pour chaque paire d'états $q_i \neq q_k$ et $q_j \neq q_k$ pour lesquels il y a une flèche de q_i à q_k étiquetée par A et une flèche de q_k à q_j étiquetée par B
    - On ajoute une flèche de q_i à q_j étiquetée par $A.C^*.B$, où C est l'étiquette de la flèche de q_k à q_k ; s'il n'y a pas de flèche de q_k à q_k, $C = \emptyset$, donc $C^* = \{\varepsilon\}$, la flèche de q_i à q_j est donc étiquetée par $A.B$
    - S'il y a déjà une flèche de q_i à q_j étiquetée par D, l'étiquette devient $\mathrm{D} \cup A.C^*.B$
  - Pour chaque paire d'états $q_i \neq q_k$ et $q_j \neq q_k$ pour lesquels il y a une flèche de q_i à q_j étiquetée par D et pas de flèche de q_i à q_k ou de q_k à q_j
    - L'étiquette de q_i à q_j reste D
  - On supprime q_k et toutes les flèches entrantes et sortantes

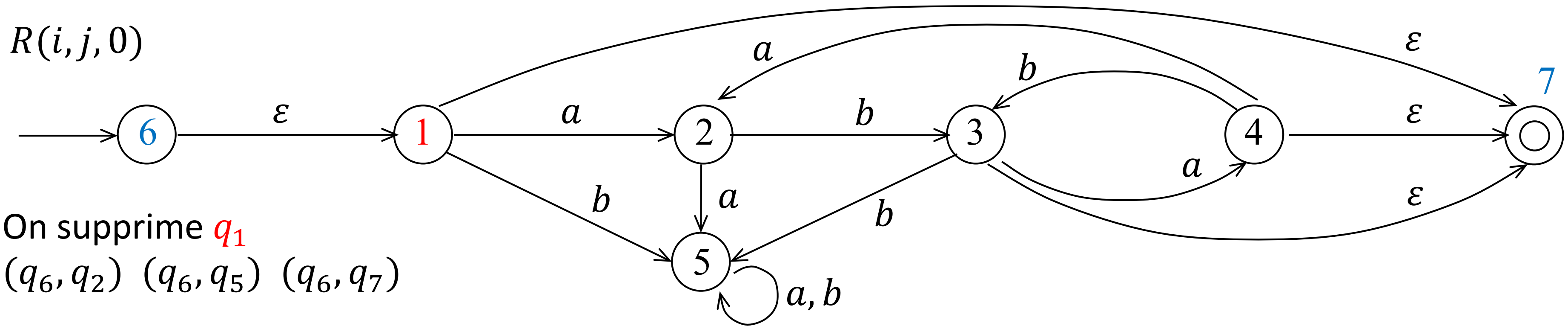


Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

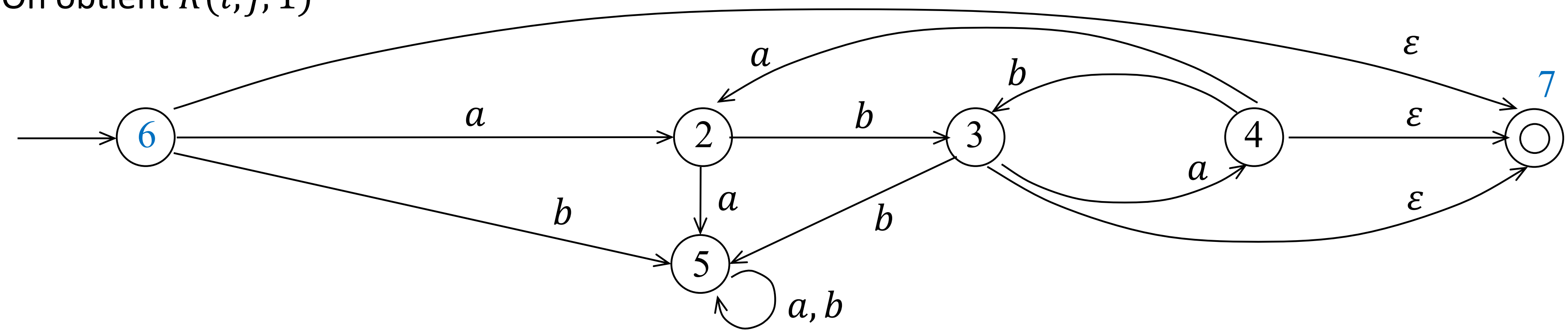
$R(i, j, 0)$



On supprime q_1

(q_6, q_2) (q_6, q_5) (q_6, q_7)

On obtient $R(i, j, 1)$

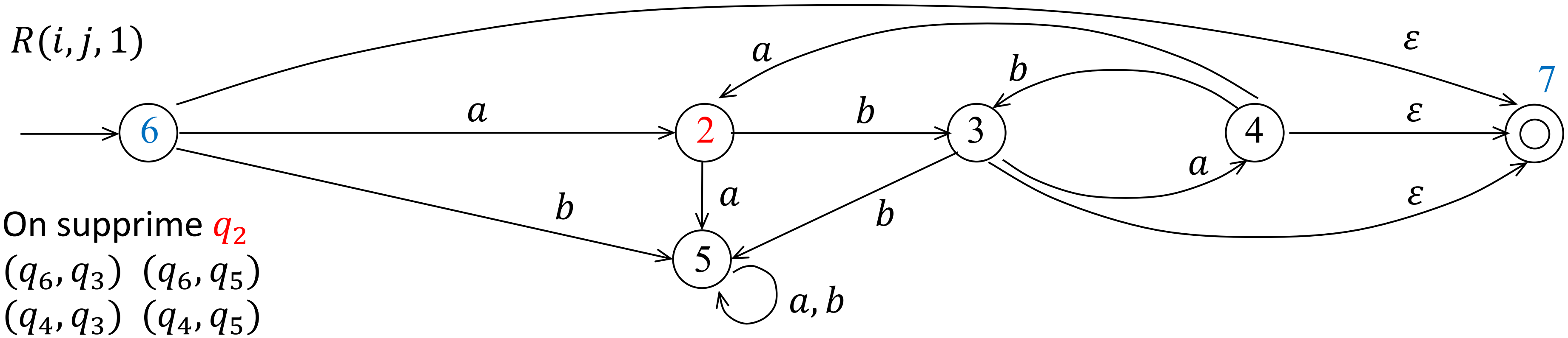


Lien avec les langages rationnels

Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

$R(i, j, 1)$

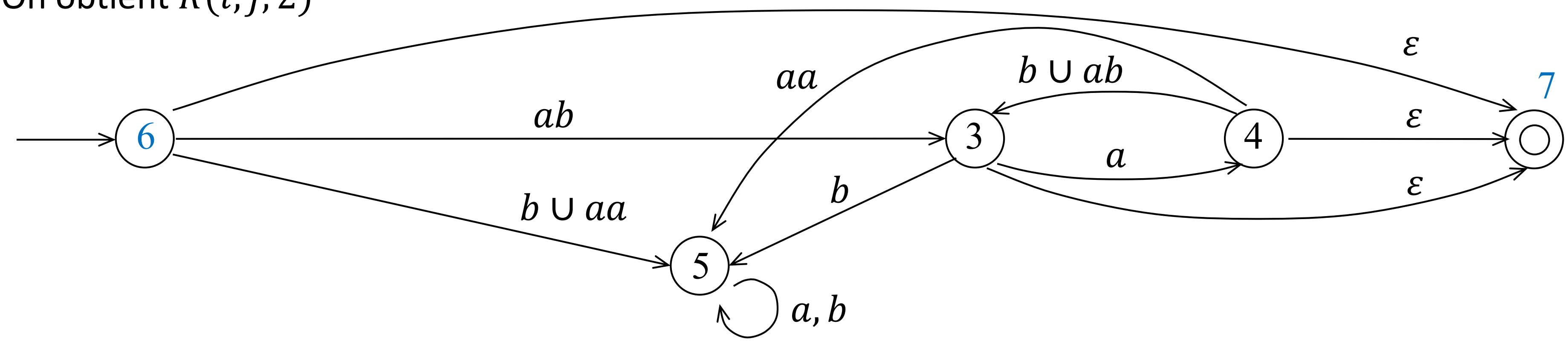


On supprime q_2

(q_6, q_3) (q_6, q_5)

(q_4, q_3) (q_4, q_5)

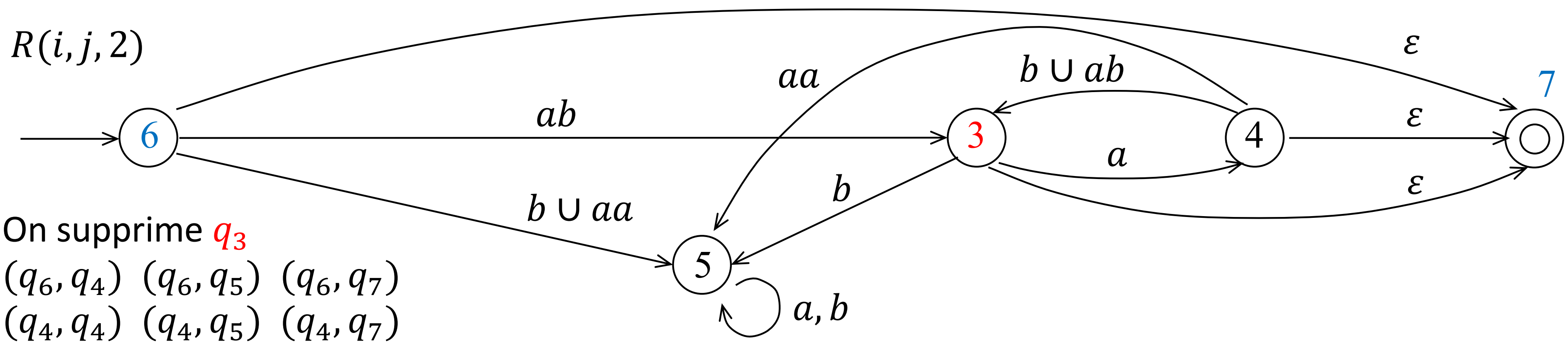
On obtient $R(i, j, 2)$



Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

$R(i,j,2)$

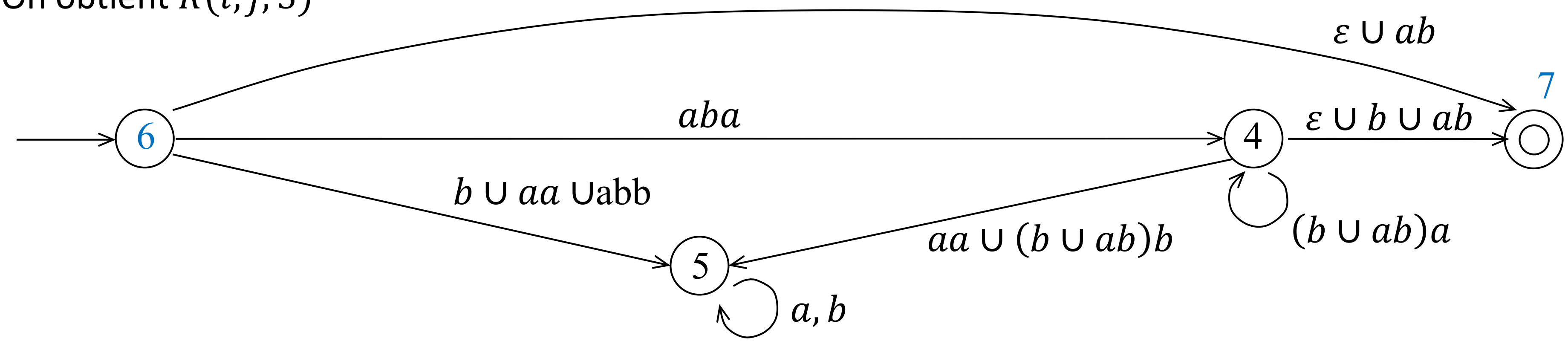


On supprime q_3

(q_6, q_4) (q_6, q_5) (q_6, q_7)

(q_4, q_4) (q_4, q_5) (q_4, q_7)

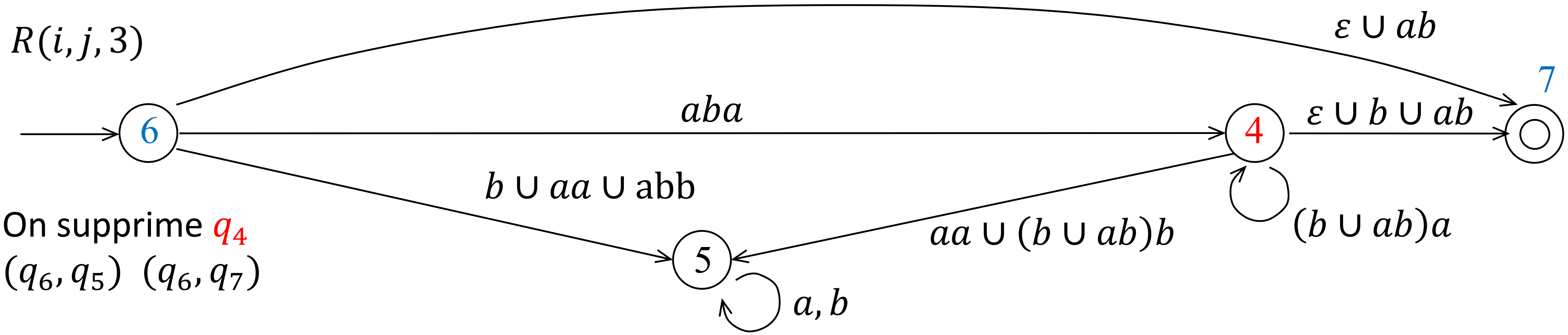
On obtient $R(i,j,3)$



Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

- Exemple

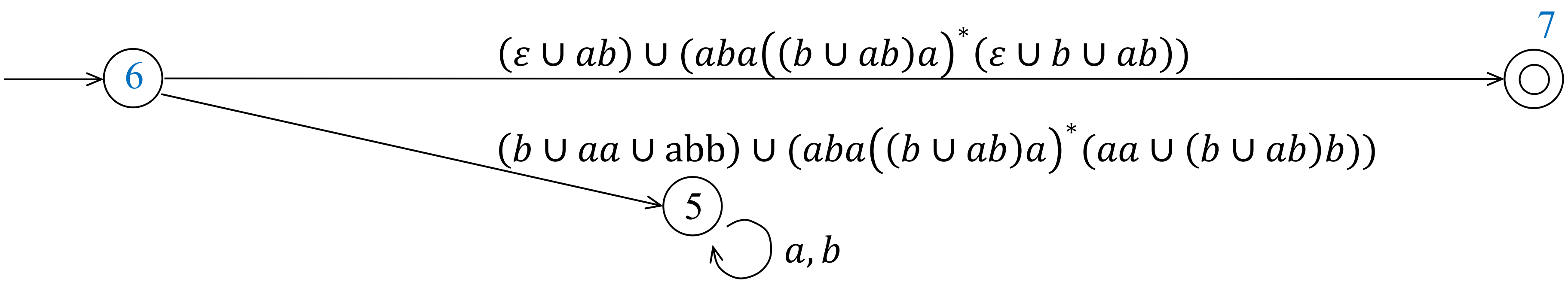
$R(i, j, 3)$



On supprime q_4

(q_6, q_5) (q_6, q_7)

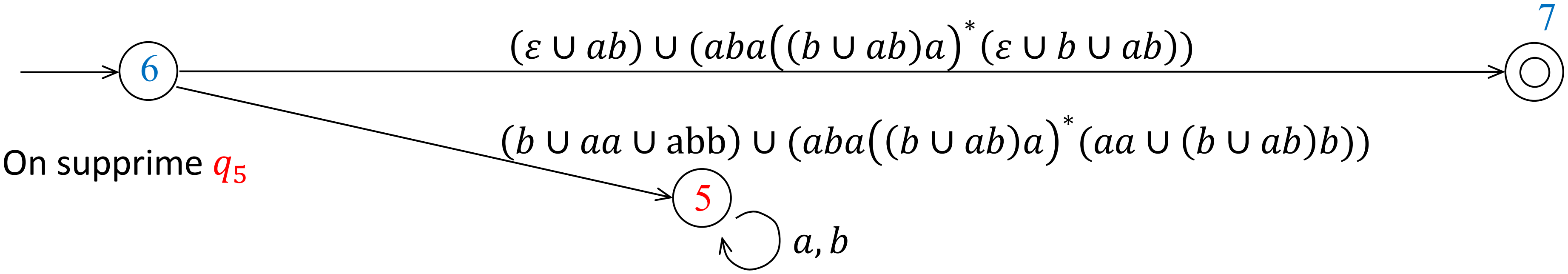
On obtient $R(i, j, 4)$



Lien avec les langages rationnels
Caractérisation des langages rationnels

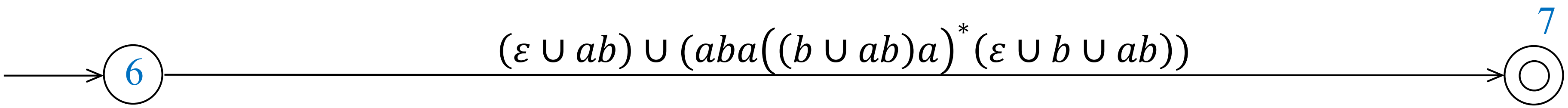
- Exemple

$R(i, j, 4)$



On supprime q_5

On obtient $R(i, j, 5)$



Donc $R(6,7,5) = R(6,7,7) = L(M) = \varepsilon \cup ab \cup aba(ba \cup aba)^*(\varepsilon \cup b \cup ab)$