

LF – Théorie des langages formels

*Sylvain Brandel*

2023 – 2024

[sylvain.brandel@univ-lyon1.fr](mailto:sylvain.brandel@univ-lyon1.fr)



CM 7

# MINIMISATION DES ÉTATS

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Contexte à droite relativement à un langage

- Définition

Soit  $L \subseteq \Sigma^*$  un langage

On définit pour un mot  $u \in \Sigma^*$  son contexte à droite relativement à  $L$  :

$$R_L(u) = \{ z \in \Sigma^* \mid uz \in L \}$$

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Equivalence des mots suivant un langage

- Définition

Soit  $L \subseteq \Sigma^*$  un langage et  $x, y \in \Sigma^*$  deux mots.

On dit que  $x$  et  $y$  sont **équivalents** suivant  $L$ , et on note  $x \approx_L y$ ,  
si pour tout mot  $z$  de  $\Sigma^*$  :

$$xz \in L \text{ ssi } yz \in L$$

- Propriété

$\approx_L$  est une relation d'équivalence

On note  $[w]_L$  la classe d'équivalence du mot  $w$ .

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Equivalence des mots suivant un langage

- Exemple  $L = (ab \cup ba)^*$   
Chercher les classes suivant  $\approx_L$  dans  $\Sigma^*$

- $[\varepsilon] = L$
- $[a] = La$
- $[b] = Lb$
- $[aa] = L(aa \cup bb) \Sigma^*$
- $[bb] = [aa]$
- $[bba] = [aa]$
- $[aaa] = [aa]$
- $[ab] = L = [ba] = [\varepsilon]$  car  $ab \in L$

...

On montre facilement par récurrence qu'on a toutes les classes

- On obtient 4 classes d'équivalence :  
$$\Sigma^* = L \cup La \cup Lb \cup L(aa \cup bb) \Sigma^*$$

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Equivalence des mots suivant un automate

- Définition

Soit  $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$  un automate **déterministe** (fini), et  $x, y \in \Sigma^*$  deux mots.

On dit que  $x$  et  $y$  sont **équivalents** relativement à  $M$ , on note  $x \sim_M y$ ,

ssi il existe un état  $q$  de  $K$  tel que :

$$(s, x) \vdash_M^* (q, \varepsilon) \text{ et } (s, y) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$$

- $M$  étant déterministe, si on note  $q_M(x)$  l'**état** auquel on parvient dans  $M$  en lisant  $x$ , on a :

$$x \sim_M y \text{ ssi } q_M(x) = q_M(y)$$

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

Equivalence des mots suivant un **automate**

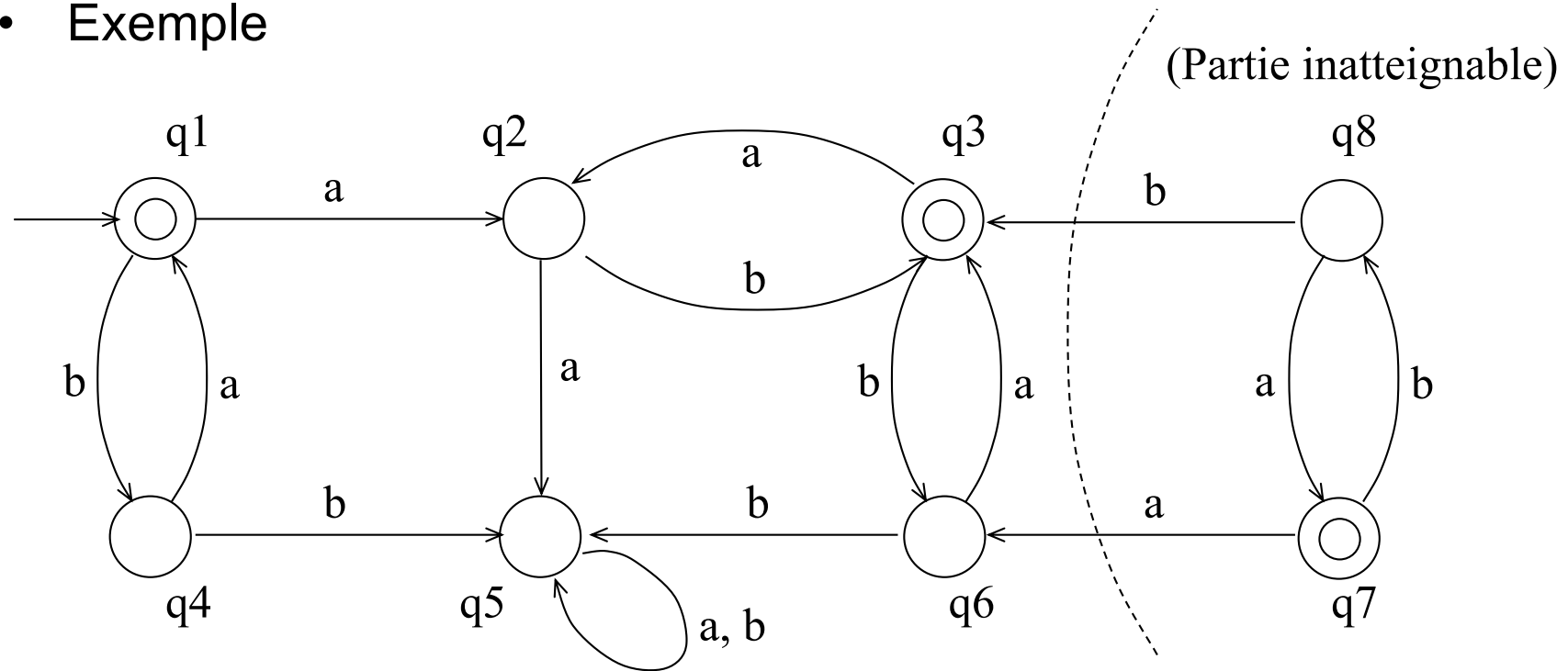
- Propriétés
  - $\sim_M$  est une relation d'équivalence.
  - On note  $E_q$  la classe d'équivalence des mots  $x$  tels que  $q_M(x) = q$   
 $E_q = \emptyset$  si l'état est inatteignable
  - Il y a autant de classes d'équivalence que d'états atteignables (accessibles).

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

Equivalence des mots suivant un **automate**

- Exemple



$[\varepsilon] = E_{q1} \cup E_{q3}$
$[a] = E_{q2}$
$[b] = E_{q4} \cup E_{q6}$
$[aa] = E_{q5}$

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

Equivalence des mots suivant un **automate**

- $E_q = L(M^q)$  avec  $M^q = (K, \Sigma, \delta, s, \{q\})$
- Théorème

*Pour tout automate fini **déterministe**  $M$  et deux mots  $x, y \in \Sigma^*$ , on a :*

*si  $x \sim_M y$  alors  $x \approx_{L(M)} y$*

(on dit que  $\sim_M$  raffine  $\approx_{L(M)}$ )

Les classes de  $\sim_M$  sont plus petites (et incluses) dans les classes de  $\approx_{L(M)}$



# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Automate standard

- Théorème de Myhill – Nerode

*Soit  $L \subseteq \Sigma^*$  un langage rationnel.*

*Il existe un automate **déterministe** ayant  $|\Sigma^* / \approx_L|$  états acceptant  $L$ .*

*(C'est-à-dire autant d'états que le nombre de classes d'équivalence suivant  $\approx_L$ .)*

- Cet automate a le plus petit nombre d'états possibles
- Il n'y a qu'un seul automate vérifiant cela
- On appelle cet automate **l'automate standard** de  $L$   
(ou automate minimal de  $L$ ).

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Automate standard

- Preuve (constructive) :

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$  automate standard d'un langage  $L$ , avec

- $K = \{ [x], x \in \Sigma^* \}$
- $s = [\varepsilon]$
- $F = \{ [x], x \in L \}$
- $\delta$  : définie par  $\delta([x], a) = [xa]$

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Automate standard

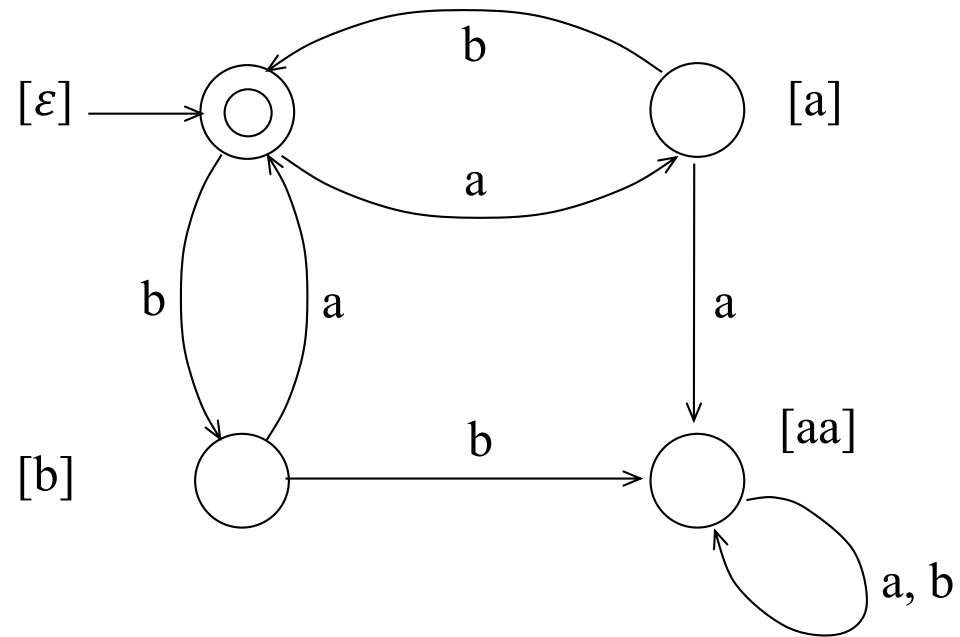
- $K$  est fini car  $L$  est reconnu par un automate déterministe  $M'$   
$$|\Sigma^* / \sim_{M'}| \geq |\Sigma^* / \approx_L|$$
- $\delta$  bien définie : si  $[x] = [y]$  alors  $[xa] = [ya]$   
(clair car :  $x \approx_L y \Rightarrow xa \approx_L ya$ )
- $L = L(M)$ 
  - (i) on montre d'abord que  $([x], y) \vdash_M^* ([xy], \varepsilon)$  (par induction sur  $|y|$ )
  - (ii)  $\forall x \in \Sigma^*, x \in L(M)$  ssi  $([\varepsilon], x) \vdash_M^* ([x], \varepsilon)$  et  $[x] \in F$  ie  $x \in L$   
(par définition de  $F$ )

# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Automate standard

- Exemple



# Minimisation des états

## *Théorème de Myhill – Nerode*

### Corollaire (Myhill – Nerode)

- Théorème

*L est rationnel ssi  $\approx_L$  a un nombre fini de classes d'équivalence.*

# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

- Définition

Soit  $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$  un automate fini **déterministe**.

On note  $M(q)$ , pour  $q \in K$ , l'automate  $(K, \Sigma, \delta, q, F)$ .

(Avec cette notation,  $M = M(s)$ .)

On dit que  $p$  et  $q$  sont **deux états équivalents** de  $M$ , et on note  $p \equiv q$ ,  
ssi  $L(M(p)) = L(M(q))$ .

- $p \equiv q$  ssi  $\forall w \in \Sigma^*$ ,
  - soit  $(p, w) \vdash_M^* (f_1, \varepsilon)$  et  $(q, w) \vdash_M^* (f_2, \varepsilon)$  avec  $f_1, f_2 \in F$
  - soit  $(p, w) \vdash_M^* (g_1, \varepsilon)$  et  $(q, w) \vdash_M^* (g_2, \varepsilon)$  avec  $g_1, g_2 \notin F$

classe d'équivalence des mots  $x$  tels que  $q_M(x) = p$

# Minimisation des états

## *Minimisation d'un automate donné*

- Propriété

$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$  sans états inatteignables ( $E_p \neq \emptyset \forall p \in K$ ).

Soient  $p$  et  $q \in K$ .  $(\exists v \in \Sigma^* \mid E_p \subset [v] \text{ et } E_q \subset [v]) \Leftrightarrow p \equiv q$

- Corollaire

$\equiv$  sur  $K$  induit une relation d'équivalence sur  $\Sigma^* / \sim_M$  (notée  $\approx$ )  
définie par  $E_p \approx E_q$  ssi  $p \equiv q$

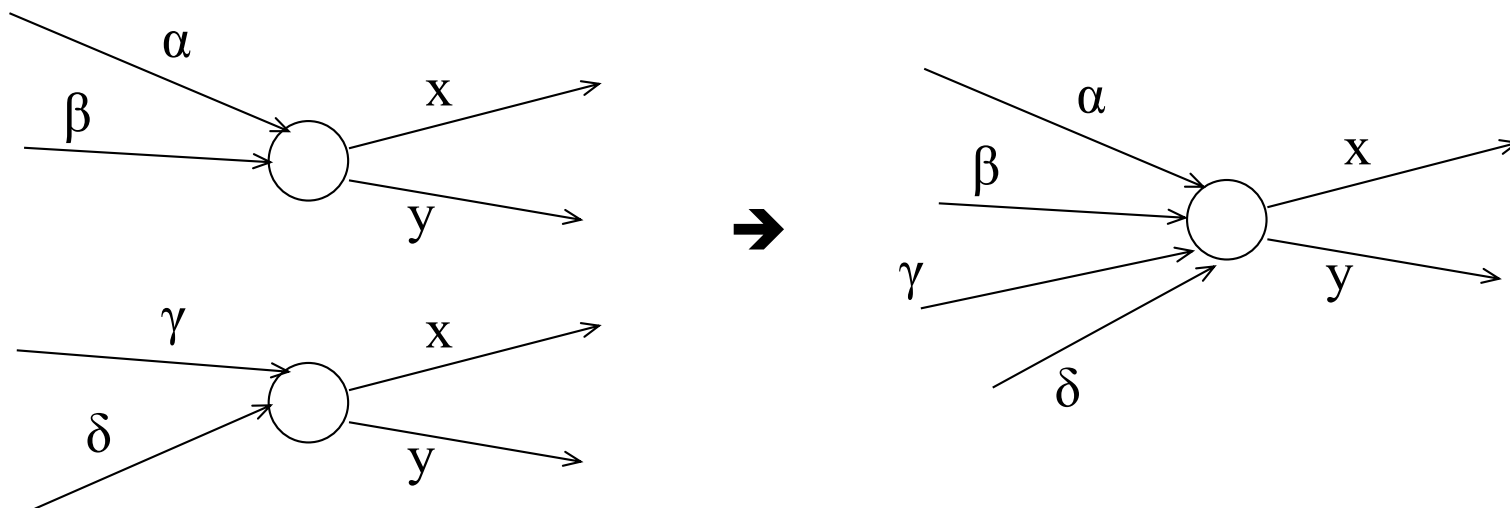
Chaque classe d'équivalence correspond à une classe de la forme  $[v]$ .

# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

Deux états équivalents sont ceux qu'on doit fusionner pour obtenir l'automate (minimal) standard.

On garde les flèches entrantes et on oublie les flèches sortantes de l'un des états (qui sont étiquetées par toutes les lettres de  $\Sigma$ )





# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

- Concrètement

On calcule  $\equiv$  puis on fait la fusion.

$\equiv$  est calculée comme la limite de  $(\equiv_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

$\equiv_i$  définie par :

$p \equiv_i q$  ssi pour tout mot  $w$  de longueur  $\leq i$  tel que

$(p, w) \vdash_M^* (f_1, \varepsilon)$  et  $(q, w) \vdash_M^* (f_2, \varepsilon)$

on a  $f_1 \in F \Leftrightarrow f_2 \in F$

(ou  $L(M(p)) \cap (\cup_{k=0}^i \Sigma^k) = L(M(q)) \cap (\cup_{k=0}^i \Sigma^k)$  )

$\forall i \in \mathbb{N} :$              $p \equiv q \Leftrightarrow p \equiv_i q$

et     $p \equiv_i q \Leftrightarrow p \equiv_{i-1} q$

# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

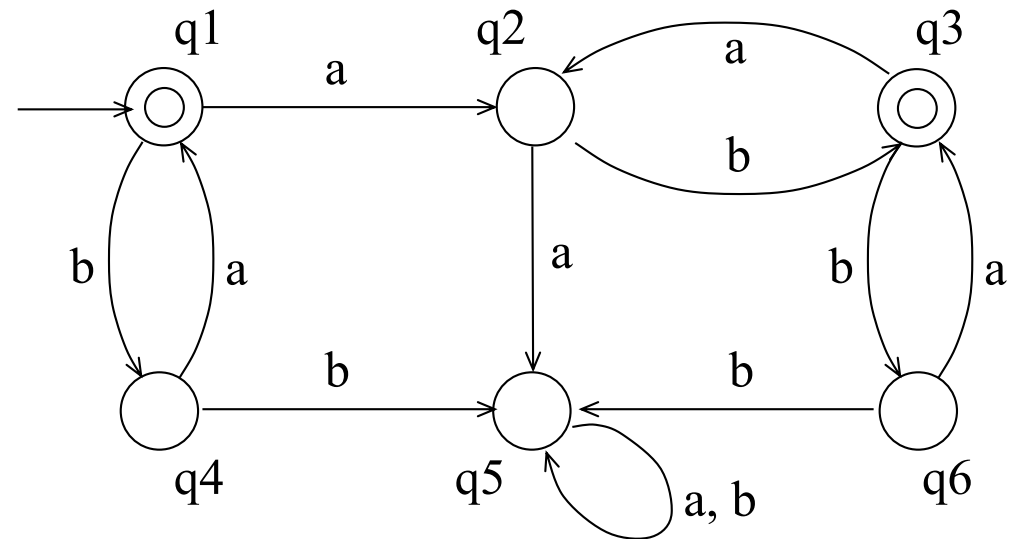
- Propriété

Pour tout couple  $(p, q) \in K^2$  et  $n \geq 1$  on a :

$$p \equiv_n q \text{ ssi } p \equiv_{n-1} q$$

$$\text{et } \forall \sigma \in \Sigma, \delta(p, \sigma) \equiv_{n-1} \delta(q, \sigma)$$

- Exemple



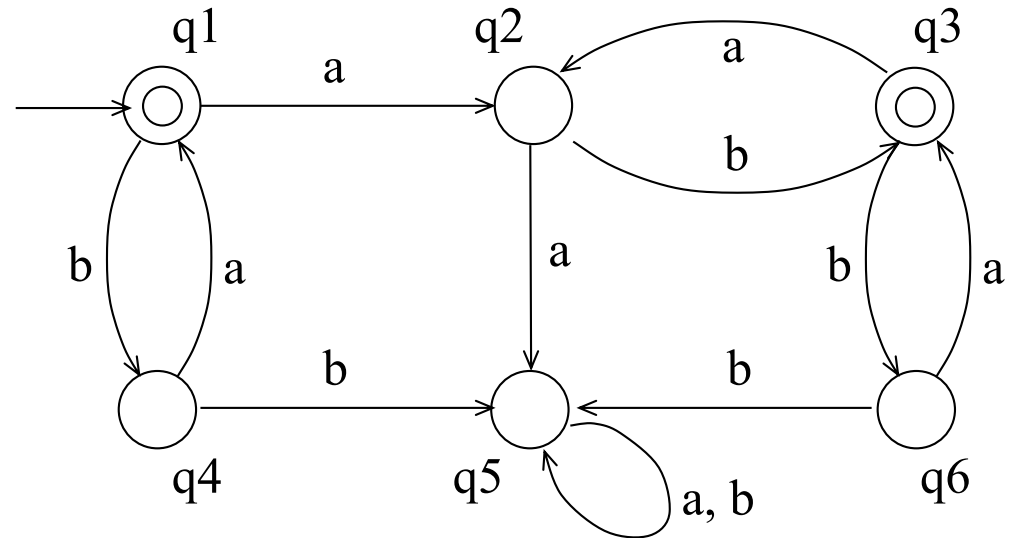
$q_1 \equiv_0 q_3$  car  $q_1 \in F$  et  $q_3 \in F$

$q_2 \equiv_0 q_4$  car  $q_2 \notin F$  et  $q_4 \notin F$

# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

- Exemple



$q_1 \equiv_1 q_3$  car

$q_1 \equiv_0 q_3$  et  $\delta(q_1, a) \equiv_0 \delta(q_3, a)$

$(\delta(q_1, a) = q_2 \text{ et } \delta(q_3, a) = q_2 \text{ et } \{q_2\})$

$\delta(q_1, b) \equiv_0 \delta(q_3, b)$

$(\delta(q_1, b) = q_4 \text{ et } \delta(q_3, b) = q_6 \text{ et } \{q_4, q_6\})$

$q_2 \not\equiv_1 q_4$  car

$\delta(q_2, a) \not\equiv_0 \delta(q_4, a)$

$(\delta(q_2, a) = q_5 \text{ et } \delta(q_4, a) = q_1 \text{ et } \{q_1, q_3\} \text{ et } \{q_5\})$

# Minimisation des états

## Minimisation d'un automate donné

- Exemple

$\equiv_0 : \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5, q_6\}$

$\equiv_1 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$

$\equiv_2 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$

...

(Ça ne change plus)

- Finalemment :

$q_1 \equiv q_3$

$q_4 \equiv q_6$

