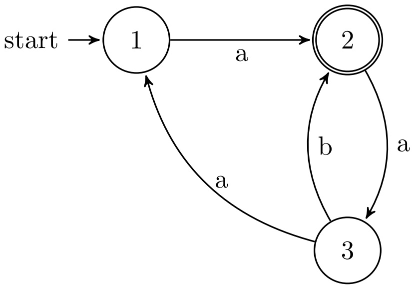
TD 5 – Lemme d'Arden – rationalité

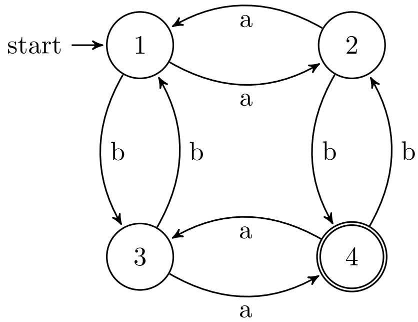
Lemme d'Arden :

$X = e\,X + f$ avec e, f : expressions régulières

$e^*.\,f$ est solution minimale de $X = e\,X + f$ si $\varepsilon \in e$
est solution unique de $X = e\,X + f$ si $\varepsilon \notin e$

1. En utilisant le lemme d'Arden, donnez une expression régulière décrivant le langage reconnu par les automates :





La classe des langages rationnels est stable pour l'union, la concaténation, l'étoile de Kleene, l'intersection et le complémentaire.

Pour montrer qu'un langage L est **non** rationnel, on fait le raisonnement par l'absurde suivant :

- Supposer L rationnel ;
- Déterminer L_1 rationnel tel que L_1 op L = L_2 (op $\in$ {$\cup$, ., *, $\cap$, complémentaire}), L_2 connu non rationnel ;
- L_1 op L rationnel par stabilité, L_2 connu non rationnel, donc contradiction.

2. Montrez que le complémentaire d'un langage non rationnel est non rationnel.

3. Est-ce que la classe des langages non rationnels est stable par
   a) Union ?
   b) Intersection ?
   c) Étoile de Kleene ?

4. À l'aide des propriétés de stabilité, montrez que le langage L = { w $\in$ {a,b}* | w comporte autant de a que de b } est non rationnel.

Lemme de l'étoile :

Soit L un langage rationnel infini accepté par un automate <u>déterministe</u> M à k états.
Soit z un mot quelconque de L tel que $|z| \geq k$.
Alors z peut être décomposé en uvw avec $|uv| \leq k$, $|v| \neq 0$ et $uv^iw \in L$, $\forall\, i \geq 0$.

5. À l'aide du lemme de l'étoile, montrez que le langage $L = \{a^p b^q \mid p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{N}, q \leq p\}$ est non rationnel.