

LC – logique classique

Sylvain Brandel

2025 – 2026

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Partie 1

INTRO, RAPPELS, INDUCTIFS

Fonctionnement

- CM : 8 x 1h30 (8 → 6 séances)
 - Mardi 14h
 - Cela paraît évident mais ... **Silence dans l'amphi**. S'il vous plaît.
- TD : 8 x 1h30
 - Généralement lundi 8h
 - Début des TD lundi 8 septembre 2025
- TP : 4 x 1h30 (4 → 6 séances)
 - Généralement lundi 9h45 ou 11h30, après le TD de LF
 - Début des TP **mardi** 30 septembre 2025 14h ou 15h45
- Fin des enseignements mardi 2 décembre 2025 (hors rattrapage)
- Lien fort avec LF

Planning global

Date	LUNDI			MARDI		
	8:00-09:30	9:45-11:15	11:30-13:00	14:00-15:30	15:45-17:15	17:30-19:00
01/09/25		LF CM1	LC CM1	LC CM2	LF CM2	
08/09/25	LC TD1	LF TD1		LC CM3	LF CM3	
15/09/25	LC TD2	LF TD2		LC CM4	LF CM4	
22/09/25	LC TD3	LF TD3		LF TP1		
29/09/25	LC TD4	LF TD4		LC TP1		
06/10/25	LC TD5	LF TP2		LC CM5	LF CM5	
13/10/25	LF TD5	LC TP2		LC CM6	LF CM6	
20/10/25	LC TD6	LF TP3		LC CM7	LF CM7	
27/10/25	Pas d'enseignements en licence					
03/11/25	LF TD6	LC TP3		LC CM8	LF CM8	
10/11/25	LC TD7	LF TD7		Férié		
17/11/25	LC TD8	LF TP4		LF CM9	LF CM10	
24/11/25	LC TD9	LC TP4				
01/12/25	TP noté (date à confirmer)			LC interro finale	LF interro finale	
08/12/25						
15/12/25						
22/12/25	Vacances					
29/12/25						
05/01/26						

TP

- En Coq
 - <https://softwarefoundations.cis.upenn.edu>

Evaluation

- <http://sylvain.brandel.pages.univ-lyon1.fr/logique/>
- UE en CCI (Contrôle Continu Intégral)
 - 3 épreuves :
 - Une interrogation d'1h, en séance de TD le lundi matin (date communiquée) 30%
 - Un TP noté de 30min, lundi 1^{er} décembre 2025 (à confirmer) 30%
 - Une interrogation finale d'1h, mardi 2 décembre 2025 (à confirmer) 40%
 - Une épreuve de seconde chance (E2C)
 - Ouvert à tous
 - La note remplacera la moins bonne des notes obtenues aux interrogations, si elle est supérieure (le TP noté ne peut pas être remplacé par l'E2C)
- **ATTENTION : Depuis 2023 – absences aux contrôles**
 - ~~ABJUS => note neutralisée ; ABINJ => zéro~~
 - Plus de distinction pédagogique entre ABJUS et ABINJ
 - Un absent n'a pas été évalué, l'absence justifiée ou non a le même impact sur la note
 - En cas d'absence, justifiée ou non : zéro à l'épreuve
 - La note d'E2C remplace une absence, justifiée ou non
 - En cas d'absences justifiées à 2 épreuves ou plus, *possibilité* d'épreuves de substitution

De votre côté

- Travail personnel conséquent
- Se préparer à l'avance
- Ne pas attendre que les réponses viennent toutes seules

- Lisez vos mails ...

- Contactez-moi, par mail, précisez LC

Motivations

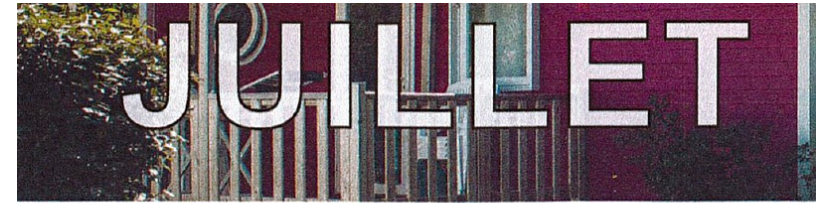
- Informatique fondamentale
- Programmation (≠ pratique d'un langage de prog)
- Lien avec les langages de programmation
 - L1 : algo prog récursive
 - L2 : prog fonctionnelle
- Vous intéresser ...

Pourquoi

JUILLET 2024

DATE	Pleines mers sur fond orange				Basses mers sur fond blanc			
	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.	HEURE	COEF.
1 L	01:09	58	06:47	---	13:53	58	19:23	---
2 M	02:16	59	07:54	---	14:52	60	20:29	---
3 M	03:18	63	08:56	---	15:45	65	21:29	---
4 J	04:14	68	09:51	---	16:33	70	22:23	---
5 V	05:03	72	10:41	---	17:17	74	23:13	---
6 S	05:47	76	11:26	---	17:58	77	23:58	---
7 D	06:26	78	12:08	---	18:37	78	--:--	---
8 L	00:40	---	07:03	77	12:48	---	19:13	76
9 M	01:20	---	07:37	75	13:26	---	19:48	72
10 M	01:57	---	08:10	70	14:05	---	20:24	67
11 J	02:34	---	08:45	64	14:43	---	21:02	60
12 V	03:13	---	09:24	56	15:24	---	21:43	53
13 S	03:54	---	10:11	49	16:10	---	22:31	45
14 D	04:40	---	11:11	42	17:03	---	23:30	39
15 L	05:35	---	12:21	37	18:04	---	--:--	---
16 M	00:40	36	06:40	---	13:30	37	19:09	---
17 M	01:52	38	07:45	---	14:30	41	20:12	---
18 J	02:57	45						
19 V	03:52	55						
20 S	04:40	65						
21 D	05:23	76	11:07	---	17:35	81	23:33	---
22 L	06:04	85	11:51	---	18:17	89	--:--	---
23 M	00:18	---	06:45	92	12:35	---	19:01	94
24 M	01:02	---	07:27	95	13:19	---	19:47	94
25 J	01:47	---	08:12	93	14:04	---	20:35	91
26 V	02:32	---	08:59	87	14:51	---	21:27	82
27 S	03:19	---	09:52	77	15:43	---	22:23	71
28 D	04:11	---	10:55	65	16:41	---	23:30	59
29 L	05:10	---	12:13	54	17:48	---	--:--	---
30 M	00:48	50	06:18	---	13:35	47	19:05	---
31 M	02:08	47	07:37	---	14:46	48	20:22	---

JUILLET						
	PLEINES MERS				BASSES MERS	
	Heure	Coef	Heure	Coef	Heure	Heure
1L	01:09	58	13:53	58	06:47	19:23
2M	02:16	59	14:52	60	07:54	20:29
3M	03:18	63	15:45	65	08:56	21:29
4J	04:14	68	16:33	70	09:51	22:23
5V	05:03	72	17:17	74	10:41	23:13
6S	05:47	76	17:58	77	11:26	23:58
7D	06:26	78	18:37	78	12:08	--:--
8L	00:40	77	19:13	76	00:40	12:48
9M	01:20	75	19:48	72	01:20	13:26
10M	01:57	70	20:24	67	01:57	14:05
11J	02:34	64	21:02	60	02:34	14:43
12V	03:13	56	21:43	53	03:13	15:24
13S	03:54	49	22:31	45	03:54	16:10
14D	04:40	42	23:30	39	04:40	17:03
15L	05:35	37	--:--	---	05:35	18:04
16M	00:40	36	13:30	37	06:40	19:09
17M	01:52	38	14:30	41	07:45	20:12
18J	02:57	45	15:23	50	08:43	21:08
19V	03:52	55	16:10	60	09:35	22:05
20S	04:40	65	17:03	70	10:26	23:02
21D	05:23	76	18:04	81	11:15	24:00
22L	06:04	85	18:17	89	11:51	--:--
23M	00:18	92	19:01	94	00:18	12:35
24M	01:02	95	19:47	94	01:02	13:19
25J	01:47	93	20:35	91	01:47	14:04
26V	02:32	87	21:27	82	02:32	14:51
27S	03:19	77	22:23	71	03:19	15:43
28D	04:11	65	23:30	59	04:11	16:41
29L	05:10	54	--:--	---	05:10	17:48
30M	00:48	50	13:35	47	06:18	19:05
31M	02:08	47	14:46	48	07:37	20:22



Date	Pleines mers						Basses mers			
	Heure h mm	haut m	Coef	Heure h mm	haut m	Coef	Heure h mm	haut m	Heure h mm	haut m
lun. 01	01:09	4.90	58	13:53	4.75	58	06:47	2.04	19:23	2.05
mar. 02	02:16	4.89	59	14:52	4.86	60	07:54	2.03	20:29	1.96
mer. 03	03:18	4.93	63	15:45	5.00	65	08:56	1.95	21:29	1.83
jeu. 04	04:14	4.99	68	16:33	5.14	70	09:51	1.84	22:23	1.69
ven. 05	05:03	5.06	72	17:17	5.25	74	10:41	1.74	23:13	1.58
sam. 06	05:47	5.11	76	17:58	5.31	77	11:26	1.67	23:58	1.52
dim. 07	06:26	5.11	78	18:37	5.32	78	--:--	---	12:08	1.65
lun. 08	00:40	1.52	---	12:48	1.68	---	07:03	5.07	19:13	5.27
mar. 09	01:20	1.59	---	13:26	1.76	---	07:37	5.00	19:48	5.17
mer. 10	01:57	1.71	---	14:05	1.88	---	08:10	4.89	20:24	5.04
jeu. 11	02:34	1.86	---	14:43	2.04	---	08:45	4.76	21:02	4.89
ven. 12	03:13	2.04	---	15:24	2.20	---	09:24	4.62	21:43	4.72
sam. 13	03:54	2.22	---	16:10	2.37	---	10:11	4.48	22:31	4.56
dim. 14	04:40	2.39	---	17:03	2.51	---	11:11	4.37	23:30	4.42
lun. 15	05:35	2.53	---	18:04	2.59	---	--:--	---	12:21	4.33
mar. 16	00:40	4.35	36	13:30	4.39	37	06:40	2.58	19:09	2.56
							7:45	2.53	20:12	2.43
							8:43	2.37	21:08	2.21
							9:35	2.16	21:59	1.94
sam. 20	04:40	4.90	65	16:53	5.23	71	10:22	1.91	22:47	1.66
dim. 21	05:23	5.11	76	17:35	5.46	81	11:07	1.66	23:33	1.39
lun. 22	06:04	5.29	85	18:17	5.64	89	11:51	1.45	--:--	---
mar. 23	00:18	1.19	---	12:35	1.31	---	06:45	5.40	19:01	5.75
mer. 24	01:02	1.09	---	13:19	1.27	---	07:27	5.42	19:47	5.74
jeu. 25	01:47	1.11	---	14:04	1.33	---	08:12	5.34	20:35	5.62
ven. 26	02:32	1.24	---	14:51	1.48	---	08:59	5.17	21:27	5.40
sam. 27	03:19	1.47	---	15:43	1.70	---	09:52	4.94	22:23	5.12
dim. 28	04:11	1.76	---	16:41	1.95	---	10:55	4.72	23:30	4.84
lun. 29	05:10	2.06	---	17:48	2.17	---	--:--	---	12:13	4.57
mar. 30	00:48	4.64	50	13:35	4.55	47	06:18	2.29	19:05	2.27
mer. 31	02:08	4.57	47	14:46	4.67	48	07:37	2.36	20:22	2.20

Question. 27 juillet, à quelle heure la marée haute du matin ?

27 S 03:19 --- 09:52 77 15:43 --- 22:23 71

27S 03:19 77 22:23 71 03:19 15:43

sam. 27 03:19 1.47 --- 15:43 1.70 --- 09:52 4.94 22:23 5.12

Pourquoi

Les candidats et étudiants suivants ne sont pas concernés par la procédure dématérialisée de recrutement :

1° Les candidats de nationalité étrangère (à l'exclusion des ressortissants de l'Espace économique européen, d'Andorre, de Suisse ou de Monaco) **et** dont le pays de résidence est couvert par le dispositif *Études en France* :

<https://pastel.diplomatie.gouv.fr/etudesenfrance/dyn/public/authentication/login.html>

Question. Je suis Allemand. Suis-je concerné par la procédure dématérialisée ?

Pourquoi

- Exemples anecdotiques mais des fois
 - Perte d'argent, de beaucoup d'argent
 - Pire, pertes humaines
- Définition du raisonnement formel et abstrait
- Exprimer propriétés et démonstrations
- Code rapide, mais correct ?
- Spécification et vérification du comportement des programmes
 - Univoque
 - Claire
- Aller vers du code correct

Pourquoi

- Validation de l'UE si :
 - Règles de raisonnement
 - Induction
 - Spécification au premier ordre
- Echech à l'UE si :
 - « Vous ne savez pas lire »
 - Vous ne connaissez pas votre cours (rappel TD lundi matin 8h ...)

Comment

- Base de la programmation \Leftrightarrow Bases du raisonnement
 - Systèmes de types
 - Discipline de types : Logique
 - Type : formule
 - Programme : preuve
 - Calcul : cut elim \Rightarrow cadre fonctionnel typé
 - Définition d'objets et d'ensembles
 - Par décision \rightarrow LifLF
 - Par construction \rightarrow LifLC, et aussi LifLF
 - \Rightarrow LF : fonctions de reconnaissance
 - \Rightarrow LC : preuves de correction
 - TP : manipulation de la programmation et du raisonnement
 - Gallina – Coq
 - Fonctionnel, fortement typé, avec filtrage
 - Plus facile que LifAP2 : pas d'excuse

Sources et références

David / Nour / Raffali

Introduction à la logique

Jean Gallier

Logic For Computer Science

Foundations of Automatic Theorem Proving

Cours

Mijoule, Forest, Coquery, Goubault-Larrecq, **Urbain**

Ensembles

- Définition d'un ensemble

- Par **extension** :

$$E = \{a, b, c\}$$

- Par **intension** :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est divisible par } 2\}$$

- Opérations ensemblistes

- Appartient :

$$x \in E : x \text{ est dans } E \quad x \notin E : x \text{ n'est pas dans } E$$

- Ensemble vide :

$$\{\}, \text{ noté } \emptyset$$

- Inclusion :

$$E \subset F, E \subseteq F, E \not\subset F, E \not\subseteq F$$

$E \subset F$: tous les éléments de E sont dans F

- Ensemble des **parties** de E : $\mathcal{P}(E) = \{E_1 \mid E_1 \subset E\}$

- Intersection :

$$E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$$

- Union :

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$$

- Différence :

$$E \setminus E_1 = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin E_1\}$$

- Produit cartésien :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Relations

- Relations binaires : $R \subseteq \mathcal{P}(E_1 \times E_2)$, R est un ensemble de couples
- Relations n-aires : $R \subseteq \mathcal{P}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$
- Soit une relation $R \in \mathcal{P}(E \times E)$:
 - R réflexive si $x \in E$ alors $R(x, x)$
 - R antiréflexive si $x \in E$ alors $(x, x) \notin R$
 - R symétrique si $R(x, y)$ alors $R(y, x)$
 - R antisymétrique si $R(x, y)$ et $R(y, x)$ alors $x = y$
ou si $R(x, y)$ et $x \neq y$ alors $(y, x) \notin R$
 - R transitive si $R(x, y)$ et $R(y, z)$ alors $R(x, z)$
 - Une relation réflexive, symétrique et transitive c'est ... ?
Relation d'équivalence
 - Une relation réflexive, antisymétrique et transitive c'est ... ?
Relation d'ordre

Relations

Stabilité en clôture

- Soient un ensemble E
un ensemble $E_1 \in \mathcal{P}(E)$
une relation n -aire R sur E ($R \subset E \times E \times \dots \times E$)
- E_1 **stable** par R ou **close** par R
si $x_1 \in E_1, x_2 \in E_1, \dots, x_{n-1} \in E_1$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ alors $x_n \in E_1$
- Si E_1 non stable par R , il existe un **plus petit** sous ensemble F de E
tel que $F \supset E_1$ et F stable par R
 F est appelé **clôture** de E_1 par R
- Soient un ensemble E
une relation binaire R sur E ($R \subset E \times E$)
- La **Fermeture transitive** de R est la plus petite relation binaire T
telle que $T \supset R$ et T transitive

Fonctions

- **Fonction** f de E_1 vers E_2 : relation de E_1 vers E_2 telle que
si $x \in E_1$ alors il existe **au plus** un élément $y \in E_2$ tel que $f(x, y)$
 - y : **image** de x par f
 - On note $y = f(x)$
 - **Domaine** de f : sous-ensemble de E_1 des éléments ayant des images par f
- **Composition** de fonctions : o

$$f \circ g (x) = f(g(x)) \quad E_1 \xrightarrow{g} E_2 \xrightarrow{f} E_3$$

Fonctions

- **Application** f de E_1 vers E_2 : fonction telle que domaine de $f = E_1$
- Une application f est **injective**
Si $y \in E_2$, alors **au plus** un élément x de E_1 est tel que $f(x) = y$
- Une application f est **surjective**
Si $y \in E_2$, alors **au moins** un élément x de E_1 est tel que $f(x) = y$
- Une **bijection** est une application injective **et** surjective

Fonctions

- Fonction à « plusieurs arguments » :

$$f : E \rightarrow F \text{ avec } E = \{ E_0 \times E_1 \times \dots \times E_n \}$$

$$f ((x_0, x_1, \dots, x_n))$$

- Sous forme curryfiée :

$$f : E_0 \rightarrow (E_1 \rightarrow \dots (E_n \rightarrow F) \dots)$$

$$(\dots (f (x_0)) (x_1) \dots) (x_n)$$

Cardinal

- Deux ensembles sont **équipotents** ou **ont même cardinal** ssi il existe une bijection de l'un vers l'autre
- Un ensemble est **fini** s'il est équipotent à $\{1, 2, \dots, n\}$ pour tout entier n
- Un ensemble **infini** est un ensemble non fini
- On dit qu'un ensemble est **infini dénombrable** s'il est équipotent à \mathbb{N}
- S'il n'existe pas de bijection entre E et une partie de \mathbb{N} alors on dit que E est **infini non dénombrable**
- Proposition *Il existe des ensembles infinis non dénombrables*

Ensembles inductifs

- Soit E un ensemble
- Règle sur $E : (u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow v$ avec $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in E \times \dots \times E$ et $v \in E$
- R : ensemble de règles sur E $B = \{v \in E \mid \rightarrow v \in R\}$
- Schéma d'induction : (E, R)
- Partie close pour $(E, R) : F \subseteq E$ tq
pour toute règle $(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow v \in R$, si tous $u_i \in F$ alors $v \in F$
- Ensemble inductif de (E, R) : la **plus petite** partie close pour (E, R)
- Ex : $(\mathbb{R}, \{\rightarrow 0, n \rightarrow n + 1\})$
 \mathbb{N} partie close, \mathbb{Z} aussi, \mathbb{N} la plus petite

Ensembles inductifs

Caractérisation 1

- Proposition

Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

$$X = \bigcap_{Y \in F} Y \quad \text{avec } F = \{Y \subseteq E \text{ partie close pour } (E, R)\}$$

- Preuve

- Égalité d'ensembles : **double inclusion**
- On pose $G =$ ensemble de gauche et $D =$ ensemble de droite
- On montre
 - 1) $G \supseteq D$
 - 2) $G \subseteq D$
- On en déduit que $G = D$

ici : $G = X$ et $D = \bigcap_{Y \in F} Y$

→ preuves, fonctions

Ensembles inductifs

Preuve par induction

- Idée : objets vérifiant une propriété données = **partie close**
- Théorème

Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

Soit P une propriété sur X telle que

- $P(v)$ pour tout $v \in B$

- $P(v)$ pour tous u_1, u_2, \dots, u_n tq $(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow v \in R$
et $P(u_1), P(u_2), \dots, P(u_n)$

Alors $P(x)$ pour tout $x \in X$

- Preuve

Ensembles inductifs

Fonctions

- Idée : Y sur lequel on sait calculer une fonction donnée est **clos**
- Théorème

Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

Soit $f: X \rightarrow F$ une fonction telle que

- $f(v) \in F$ pour tout $v \in B$

- $f(v)$ avec $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ pour tous u_1, u_2, \dots, u_n

et $(u_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow v \in R$

Alors on a défini $f(x)$ pour tout $x \in X$

- Exemple

→ **Construction** des éléments ?

Ensembles inductifs

Caractérisation 2

- Proposition

Soit $X \subseteq E$ ensemble inductif de (E, R)

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \quad \text{avec } X_0 = B, X_{i+1} = X_i \cup R(X_i)$$

- Preuve

- On pose $G = X$ et $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$

- On montre

- 1) $G \subseteq D$ **par induction sur X** (donc avec les règles de constructions de X)

- 2) $G \supseteq D$ **par induction sur \mathbb{N}** (donc avec les règles de constructions de \mathbb{N})

- Idées

- 1) $X =$ éléments accessibles depuis B par un nombre fini d'étapes de R

- 2) $X =$ éléments permettant de *descendre* et atteindre B

en un nb fini d'étapes de R (à l'envers)

Ensembles inductifs

Caractérisation 2

- Ordre strict sur E : relation binaire sur E , antiréflexive et transitive
- Ordre strict $<$ bien fondé
il n'y a pas de suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout i , $x_{i+1} < x_i$
- Exemples
- Idée : descendre et atteindre le minimum en un nombre fini d'étapes
- E et $<$ bien fondé sur E
- Schéma inductif définissant E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow u \text{ pour tout } u \text{ minimal pour } < \\ u_1, u_2, \dots, u_n \rightarrow v \text{ pour tout } u_i < v \end{array} \right.$$

→ preuves, fonctions

Ensembles inductifs

Preuve par induction bien fondée

- E et $<$ bien fondé sur E
- Reformulation

Soit E un ensemble satisfaisant une propriété P

Soit $F \subseteq E$

Si pour tout $x \in E$, lorsque tous $y \in F$ pour $y < x$ alors $x \in F$
alors pour tout $x \in E$, $x \in F$

- Exemple

Ensembles inductifs

Fonctions

- E et $<$ bien fondé sur E
- Fonctions récursives : appels sur valeurs décroissantes pour $<$