

LC – Logique classique

*Sylvain Brandel*

2025 – 2026

[sylvain.brandel@univ-lyon1.fr](mailto:sylvain.brandel@univ-lyon1.fr)

*Partie 2*

# LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

# Pourquoi ?

- Niveau matériel = modèle logique
- Niveau programme : **preuve de propriété** = logique
- Niveau applicatif, BD : vérification de propriétés = logique
- ...
  
- Plus généralement
  - Criticité : sécurité, sûreté ...
  - Financier
  - Pas d'ambiguïté

# Syntaxe

- $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  un ensemble infini de variables propositionnelles
- Ensemble  $\mathcal{F}$  des formules du calcul propositionnel : ensemble inductif
  - $x$  variable propositionnelle alors  $x \in \mathcal{F}$
  - $\perp \in \mathcal{F}$
  - Si  $A \in \mathcal{F}$  alors  $\neg A \in \mathcal{F}$
  - Si  $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$  alors  $A \vee B \in \mathcal{F}, A \wedge B \in \mathcal{F}, A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
- Formule atomique : soit une variable propositionnelle, soit  $\perp$
- Notation :  $A \Leftrightarrow B : (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- Priorités :  $\neg > \wedge > \vee > \Rightarrow$
- Associativité : à gauche pour  $\wedge$  et  $\vee$ , à droite pour  $\Rightarrow$
- Ex :  $p \vee q \Rightarrow r$

# Sémantique

- Sens des formules → interprétation dans l'algèbre de Boole
- Interprétation du calcul propositionnel : fonction  $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{B}$ 
  - $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  : variables
  - $\mathbb{B} = \{0,1\}$
- $I$  étendue à  $\mathcal{F}$ 
  - Cas des variables déjà traité
  - $I(\perp) = 0$
  - $A \in \mathcal{F}$  alors  $I(\neg A) = \overline{I(A)}$
  - $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$  alors  $I(A \vee B) = I(A) + I(B)$
  - $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$  alors  $I(A \wedge B) = I(A) \cdot I(B)$
  - $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$  alors  $I(A \Rightarrow B) = I(A) \dot{\Rightarrow} I(B)$

Seule vérité autorisée, valeur de vérité de  $A \in \mathcal{F}$  notée  $I(A)$

# Algèbre de Boole



- George Boole 1815 – 1864 (Royaume-Uni)
- Booléens : oui, non ; 0, 1 ; haut, bas ; rouge, noir ; etc.
- Relation d'ordre :  $0 < 1$
- Soit  $\mathbb{B} = \{0,1\}$ . Opérations :
  - $\bar{\phantom{x}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  complément
  - $+$  :  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$   $\cup$ , ou, disjonction, max
  - $\cdot$  :  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$   $\cap$ , et, conjonction, min
  - $\Rightarrow$  :  $\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  si ... alors, implication

# Algèbre de Boole

$x$	$y$	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$x$	$y$	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$x$	$y$	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

# Algèbre de Boole

- 0 : minimum, 1 maximum
- $x \cdot 1 = x$        $x \cdot 0 = 0$
- $x + 0 = x$        $x + 1 = 1$
- Complément :  $x \cdot \bar{x} = 0$        $x + \bar{x} = 1$
- Commutativité
- Associativité
- Distributivité
- De Morgan :
  - $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$
  - $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$

# Tables de vérité

- Idée : notation par extension
- Une **ligne** par valeurs possible des variables
- Présentation des sous-fonctions en **colonnes**
- **Fonctions booléennes** : par extension, une fonction par table de vérité  
→ combien ?

# Interprétations

- Interprétation : fonction  $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{B}$

- Soit  $A$  une formule.

$$I(A) = 1 : I \text{ satisfait } A \qquad \text{noté } I \models A$$

- Ex :

- Si  $I(p) = 0$  et  $I(q) = 0$  et  $I(r) = 0$  alors  $I \models p \vee q \Rightarrow r$
- Si  $I(p) = 1$  et  $I(q) = 1$  et  $I(r) = 0$  alors  $I$  ne satisfait pas  $p \vee q \Rightarrow r$

- Soit  $E$  un ensemble de formules.

$$\text{Si } I \models A \text{ pour tout } A \in E : I \text{ satisfait } E \qquad \text{noté } I \models E$$

- Ex :

- Si  $I(p) = 1$  alors  $I \models \{p \vee q, \neg p \Rightarrow r\}$
- Si  $I(p) = 1$  alors  $I$  ne satisfait pas  $\{p \vee q, \neg p\}$

# Interprétations

$A$  : formule,  $E$  : ensemble de formules,  $I$  : interprétation

- $A$  tautologie, ou  $A$  valide noté  $\models A$   
si pour toute interprétation  $I$ ,  $I \models A$
- $E$  contradictoire, ou  $E$  non satisfiable  
s'il n'existe aucune interprétation  $I$  telle que  $I \models E$
- $E$  satisfiable  
s'il existe une (au moins) interprétation  $I$  telle que  $I \models E$
- $E$  déduit sémantiquement  $A$  noté  $E \models A$   
si toute interprétation satisfaisant  $E$  satisfait aussi  $A$
- $A$  et  $B$  sémantiquement équivalentes noté  $A \equiv B$   
si  $\{A\} \models B$  et  $\{B\} \models A$

# Modélisation

- Un logicien écoute un étudiant énumérer ses ressentis à propos des cours qu'il suit :
  - « J'aime l'informatique ou j'aime la logique »,
  - « Si j'aime l'informatique alors j'aime la logique ».
- Le logicien en déduit que l'étudiant aime la logique. Pourquoi ?
- Soient  $p$  et  $q$  deux variables propositionnelles :
  - $p$  représente « j'aime l'informatique »
  - $q$  représente « j'aime la logique »
- Les deux phrases de l'étudiant représentées par :
  1.  $p \vee q$
  2.  $p \Rightarrow q$
- Dédution du logicien représentée par  $q$
- Démontrer  $p \vee q, p \Rightarrow q \models q$

# Remplacements

- Ne pas confondre avec les substitutions (de variables)
- **Remplacement** d'une variable **propositionnelle**  $p$  par une formule  $R$  dans une formule  $A$ , noté  $A[p := R]$ , défini par **induction** sur  $A$  :
  - $p[p := R] = R$
  - $q[p := R] = q$  si  $q \neq p$
  - $\perp [p := R] = \perp$
  
  - $\neg A[p := R] = \neg(A[p := R])$
  
  - $(A \vee B)[p := R] = (A[p := R]) \vee (B[p := R])$
  - $(A \wedge B)[p := R] = (A[p := R]) \wedge (B[p := R])$
  - $(A \Rightarrow B)[p := R] = (A[p := R]) \Rightarrow (B[p := R])$
- Ex :  $(p \wedge q \Rightarrow q)[q := r \vee s] = ?$

# Quelques résultats

- Proposition 1

$A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$ ,  $E$  ensemble de formules

- $E \models A \Rightarrow B$  ssi  $E \cup \{A\} \models B$
- $E \models A$  ssi  $E \cup \{\neg A\}$  contradictoire

- Proposition 2

$A \in \mathcal{F}$  et  $R \in \mathcal{F}$ ,  $p \in \mathcal{V}$ ,  $I$  une interprétation

$I'$  définie par  $I'(p) = I(R)$  et  $I'(q) = I(q)$  si  $q \neq p$

On a  $I(A[p := R]) = I'(A)$

- Proposition 3

$A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{F}$ ,  $R \in \mathcal{F}$ ,  $R' \in \mathcal{F}$ ,  $p \in \mathcal{V}$

- Si  $I \models A$  alors  $I \models A[p := R]$
- Si  $A \equiv B$  alors  $A[p := R] \equiv B[p := R]$
- Si  $R \equiv R'$  alors  $A[p := R] \equiv A[p := R']$

# Quelques équivalences remarquables

$$A \wedge A \equiv A$$

$$A \vee A \equiv A$$

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

$$\perp \wedge A \equiv \perp$$

$$\perp \vee A \equiv A$$

$$\neg\neg A \equiv A$$

# Systemes de preuve

- Systemes de preuve par séquents : Gerhard Gentzen (1909 – 1945)
  - Dédudion naturelle
  - Calcul des séquents : LK, G ...
- Systemes de preuve par résolution
  - À partir de formes clausales
  - SAT solving ...

# Séquents

- Séquent : paire  $(\Gamma, \Delta)$  noté  $\Gamma \vdash \Delta$ 
  - $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $\Delta = \{B_1, \dots, B_m\}$  : ensembles de formules
  - $\Gamma$  : prémisses,  $\Delta$  : conclusions
  - $I$  satisfait  $(\Gamma, \Delta)$  ssi  $I \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_m)$
- Rappel ensembles inductifs
  - $E$  : ensemble,  $R$  : ensemble de règles sur  $E$
  - Schéma d'induction :  $(E, R)$
  - Ensemble inductif : la plus petite partie close pour  $(E, R)$
- On définit un schéma d'induction  $(E, R)$  avec  $E$  : ensemble de séquents
- $R = \{ \dots$
- On obtient un ensemble inductif nommé séquents prouvables

# Calcul des séquents

## Règles du système $G$

$$R = \left\{ \begin{array}{ll} \rightarrow \Gamma, A \vdash \Delta, A & (1) \\ \Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma, A \vdash \Delta & \rightarrow \Gamma \vdash \Delta & (2) \\ \Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma, B \vdash \Delta & \rightarrow \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta & (3) \\ \Gamma, A \vdash \Delta, \quad \Gamma, B \vdash \Delta & \rightarrow \Gamma, A \vee B \vdash \Delta & (4) \\ \Gamma, A, B \vdash \Delta & \rightarrow \Gamma, A \wedge B \vdash \Delta & (5) \\ \Gamma \vdash \Delta, A & \rightarrow \Gamma, \neg A \vdash \Delta & (6) \\ \Gamma, A \vdash \Delta, B & \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B & (7) \\ \Gamma \vdash \Delta, A, B & \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \vee B & (8) \\ \Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma \vdash \Delta, B & \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B & (9) \\ \Gamma, A \vdash \Delta & \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \neg A & (10) \end{array} \right\}$$

$\Gamma \cup \{A\}$  est noté  $\Gamma, A$

# Calcul des séquents

## Règles du système $G$ – exemple 1

$X = \{$	$p \vdash p, q$	(1)	(s1)
	$p, q \vdash q$	(1)	(s2)
	$p, p \Rightarrow q \vdash q$	(3) à partir de (s1) et (s2)	(s3)
	$q, p \Rightarrow q \vdash q$	(1)	(s4)
	$p \vee q, p \Rightarrow q \vdash q \}$	(4) à partir de (s3) et (s4)	(s5)

$R = \{$	$\Gamma \vdash \Delta, A$	$\rightarrow$	$\Gamma, A \vdash \Delta, A$	(1)
	$\Gamma \vdash \Delta, A, \Gamma, A \vdash \Delta$	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$	(2)
	$\Gamma \vdash \Delta, A, \Gamma, B \vdash \Delta$	$\rightarrow$	$\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta$	(3)
	$\Gamma, A \vdash \Delta, \Gamma, B \vdash \Delta$	$\rightarrow$	$\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$	(4)
	$\Gamma, A, B \vdash \Delta$	$\rightarrow$	$\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$	(5)
	$\Gamma \vdash \Delta, A$	$\rightarrow$	$\Gamma, \neg A \vdash \Delta$	(6)
	$\Gamma, A \vdash \Delta, B$	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B$	(7)
	$\Gamma \vdash \Delta, A, B$	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \vee B$	(8)
	$\Gamma \vdash \Delta, A, \Gamma \vdash \Delta, B$	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B$	(9)
	$\Gamma, A \vdash \Delta$	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, \neg A \}$	(10)

# Calcul des séquents

## Règles du système $G$ – exemple 2

$X = \{$	$p \vdash p, q$	(1)	(s1)
	$p, q \vdash q$	(1)	(s2)
	$p, p \Rightarrow q \vdash q$	(3) à partir de (s1) et (s2)	(s3)
	$p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	(7) à partir de (s3)	(s4)
	$\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \}$	(7) à partir de (s4)	(s5)

$R = \{$	$\rightarrow$	$\Gamma, A \vdash \Delta, A$	(1)
	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta$	(2)
	$\rightarrow$	$\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta$	(3)
	$\rightarrow$	$\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$	(4)
	$\rightarrow$	$\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$	(5)
	$\rightarrow$	$\Gamma, \neg A \vdash \Delta$	(6)
	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B$	(7)
	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \vee B$	(8)
	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B$	(9)
	$\rightarrow$	$\Gamma \vdash \Delta, \neg A \}$	(10)

# Calcul des séquents

## Règles du système $G$

$R = \{$	$\rightarrow \Gamma, A \vdash \Delta, A$	(axiome)
$\Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma, A \vdash \Delta$	$\rightarrow \Gamma \vdash \Delta$	(coupure)
$\Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma, B \vdash \Delta$	$\rightarrow \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta$	( $\Rightarrow_G$ )
$\Gamma, A \vdash \Delta, \quad \Gamma, B \vdash \Delta$	$\rightarrow \Gamma, A \vee B \vdash \Delta$	( $\vee_G$ )
$\Gamma, A, B \vdash \Delta$	$\rightarrow \Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$	( $\wedge_G$ )
$\Gamma \vdash \Delta, A$	$\rightarrow \Gamma, \neg A \vdash \Delta$	( $\neg_G$ )
$\Gamma, A \vdash \Delta, B$	$\rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B$	( $\Rightarrow_D$ )
$\Gamma \vdash \Delta, A, B$	$\rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \vee B$	( $\vee_D$ )
$\Gamma \vdash \Delta, A, \quad \Gamma \vdash \Delta, B$	$\rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B$	( $\wedge_D$ )
$\Gamma, A \vdash \Delta$	$\rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \neg A$	( $\neg_D$ )

# Calcul des séquents

## Règles du système $G$

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A} (ax)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} (coupure)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} (\Rightarrow_G)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} (\Rightarrow_D)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} (\vee_G)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} (\vee_D)$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} (\wedge_G)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} (\wedge_D)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} (\neg_G)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} (\neg_D)$$

# Calcul des séquents

- Proposition  
Les règles du Système G sont correctes
  
- Théorème

$\Gamma \vdash \Delta$  prouvable par Système G ssi  $\Gamma \vDash \Delta$

# Déduction naturelle

- Séquent particulier : paire  $(\Gamma, B)$  noté  $\Gamma \vdash B$ 
  - $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$  : ensemble de formules
  - $B$  : formule
  - $I$  satisfait  $(\Gamma, B)$  ssi  $I \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$

Prémisses

Conclusion

# Déduction naturelle

## Règles

$R = \{$	$\rightarrow \Gamma, A \vdash A$	$(\text{ax})$
$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma, B \vdash A$	$(\text{aff})$
$\Gamma, A \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \Rightarrow B$	$(\Rightarrow_i)$
$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^g)$
$\Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^d)$
$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \wedge B$	$(\wedge_i)$
$\Gamma, A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash \neg A$	$(\neg_i)$
$\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\Rightarrow_e)$
$\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C$	$\rightarrow \Gamma \vdash C$	$(\vee_e)$
$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\wedge_e^g)$
$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\wedge_e^d)$
$\Gamma \vdash \neg A, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash \perp$	$(\neg_e)$
$\Gamma, \neg A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\perp_c)$

# Déduction naturelle

## Exemple 1

$X = \{$	$p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash p \Rightarrow q$	(ax)	(s1)
	$p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash p$	(ax)	(s2)
	$p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash q$	$(\Rightarrow_e)$ à partir de (s1) et (s2)	(s3)
	$p \vee q, p \Rightarrow q, q \vdash q$	(ax)	(s4)
	$p \vee q, p \Rightarrow q \vdash p \vee q$	(ax)	(s5)
	$p \vee q, p \Rightarrow q \vdash q \}$	$(\vee_e)$ à partir de (s3), (s4) et (s5)	(s6)

$R = \{$		$\rightarrow \Gamma, A \vdash A$	(ax)
	$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma, B \vdash A$	(aff)
	$\Gamma, A \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \Rightarrow B$	$(\Rightarrow_i)$
	$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^g)$
	$\Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^d)$
	$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \wedge B$	$(\wedge_i)$
	$\Gamma, A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash \neg A$	$(\neg_i)$
	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\Rightarrow_e)$
	$\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C$	$\rightarrow \Gamma \vdash C$	$(\vee_e)$
	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\wedge_e^g)$
	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\wedge_e^d)$
	$\Gamma \vdash \neg A, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash \perp$	$(\neg_e)$
	$\Gamma, \neg A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\perp_c)$

# Déduction naturelle

## Exemple 2

$X = \{$	$p, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q$	(ax)	(s1)
	$p, p \Rightarrow q \vdash p$	(ax)	(s2)
	$p, p \Rightarrow q \vdash q$	$(\Rightarrow_e)$ à partir de (s1) et (s2)	(s3)
	$p \vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$(\Rightarrow_i)$ à partir de (s3)	(s4)
	$\vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \}$	$(\Rightarrow_i)$ à partir de (s4)	(s5)

$R = \{$		$\rightarrow \Gamma, A \vdash A$	(ax)
	$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma, B \vdash A$	(aff)
	$\Gamma, A \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \Rightarrow B$	$(\Rightarrow_i)$
	$\Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^g)$
	$\Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \vee B$	$(\vee_i^d)$
	$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A \wedge B$	$(\wedge_i)$
	$\Gamma, A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash \neg A$	$(\neg_i)$
	$\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\Rightarrow_e)$
	$\Gamma \vdash A \vee B, \Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C$	$\rightarrow \Gamma \vdash C$	$(\vee_e)$
	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\wedge_e^g)$
	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\rightarrow \Gamma \vdash B$	$(\wedge_e^d)$
	$\Gamma \vdash \neg A, \Gamma \vdash A$	$\rightarrow \Gamma \vdash \perp$	$(\neg_e)$
	$\Gamma, \neg A \vdash \perp$	$\rightarrow \Gamma \vdash A$	$(\perp_c)$

# Déduction naturelle

## Règles de la *déduction naturelle*

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} (ax)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} (aff)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} (\Rightarrow_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\perp_c)$$

# Déduction naturelle

## Exemple 1

$p \vee q, p \Rightarrow q \vdash q$  prouvable ?

Prouver  $\Gamma \vdash q$ , avec  $\Gamma = \{p \vee q, p \Rightarrow q\}$

?

$$\frac{\frac{\text{----- } ax}{p \vee q, p \Rightarrow q \vdash p \vee q} \quad \frac{\text{----- } ax}{p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash p} \quad \frac{\text{----- } ?}{p \vee q, p \Rightarrow q, q \vdash p}}{\text{----- } \vee_e} \quad \frac{\frac{\text{----- } ax}{p \vee q, p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow q} \quad p \vee q, p \Rightarrow q \vdash p}{\text{----- } \Rightarrow_e} q$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$$

# Déduction naturelle

## Exemple 1

$p \vee q, p \Rightarrow q \vdash q$  prouvable ?

Prouver  $\Gamma \vdash q$ , avec  $\Gamma = \{p \vee q, p \Rightarrow q\}$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash p \Rightarrow q}{} \text{ax} \quad \frac{\frac{}{p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash p}{} \text{ax}}{} \Rightarrow_e}{p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash q} \text{ax}}{\frac{\frac{\frac{}{p \vee q, p \Rightarrow q \vdash p \vee q}{} \text{ax} \quad \frac{\frac{}{p \vee q, p \Rightarrow q, p \vdash q}{} \text{ax}}{} \text{ax}}{} \vee_e}{p \vee q, p \Rightarrow q \vdash q} \text{ax}}{} \vee_e
 \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$$



# Déduction naturelle

## Règles dérivées

- Système précédent : ensemble minimal
  - Démonstrations parfois longues
  - Introduction de règles utilitaires : règles dérivables
- Exemple

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{ (coupure)}$$

$$\frac{\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow_i \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_e$$

On a une nouvelle règle (coupure)

On n'a pas ajouté de nouveaux séquents prouvables

# Déduction naturelle

- Proposition  
Les règles de déduction naturelle sont correctes

- Théorème

$\Gamma \vdash B$  prouvable par déduction naturelle ssi  $\Gamma \models B$

- Preuve
  - Sens  $\Rightarrow$  (seulement si) : induction sur  $\Gamma \vdash B$

# Forme clausale

- Littéral

Formule atomique ou négation d'une formule atomique

- Clause, ou disjonction élémentaire

Disjonction de littéraux

$l_1 \vee \dots \vee l_m, m > 0$ , chaque  $l_i$  : littéral

- FNC (Forme Normale Conjonctive)

Conjonction de clauses

$D_1 \wedge \dots \wedge D_k, k > 0$ , chaque  $D_i$  : clause

$\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n l_i^j$ , chaque  $l_i^j$  : littéral

- Conjonction élémentaire

Conjonction de littéraux

$l_1 \wedge \dots \wedge l_n, n > 0$ , chaque  $l_i$  : littéral

- FND (Forme Normale Disjonctive)

Disjonction de conjonctions élémentaires

$C_1 \vee \dots \vee C_l, l > 0$ , chaque  $C_i$  : conj. élém.

$\bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n l_i^j$ , chaque  $l_i^j$  : littéral

# Forme clausale

- Proposition 4

Pour toute formule  $A \in \mathcal{F}$ , il existe  $A' \in \mathcal{F}$  et  $A'' \in \mathcal{F}$  tq

- $A'$  est en FNC
- $A''$  est en FND
- $A \equiv A' \equiv A''$

- Preuve

- On élimine  $\perp$  avec l'équivalence  $\perp \equiv p \wedge \neg p$
- On élimine le symbole  $\Rightarrow$  avec l'équivalence  $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- On « fait rentrer » les symboles  $\neg$  avec les lois de De Morgan
- On utilise les lois de distributivité et d'élimination de la double négation

- Exemple

$$- p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \quad \equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q \quad \equiv (\neg p \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee q)$$

- Problème, nombre exponentiel de clauses

→ utiliser l'équisatisfiabilité plutôt que l'équivalence

# Forme clausale

- Equisatisfiabilité

Soient  $A \in \mathcal{F}$  et  $B \in \mathcal{F}$ .

$A$  et  $B$  sont **équisatisfiables** si  $A$  est satisfiable ssi  $B$  est satisfiable

- Proposition 5

Pour toute formule  $A \in \mathcal{F}$ , il existe  $A' \in \mathcal{F}$  tq

- $A'$  est en FNC
- $A$  et  $A'$  sont équisatisfiables
- La taille de  $A'$  est linéaire en fonction de la taille de  $A$

- Preuve

- Construire  $A'$  en FNC tq taille de  $A'$  linéaire en fonction de la taille de  $A$
- Montrer  $A$  et  $A'$  équisatisfiables

# Forme clausale

- Construction de  $A'$

- Si  $A = \perp$ , alors  $A' = p \wedge \neg p$ , où  $p$  est une variable fraîche
- Si  $A = p$ , alors  $A' = p$
- Si  $A = \neg B$ ,  $B$  de la forme  $q \wedge B'$  obtenu par induction sur  $B$ ,  $p$  une variable fraîche  
alors  $A' = p \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge B'$
- Si  $A = B \vee C$ ,  $B$  de la forme  $q \wedge B'$  obtenu par induction sur  $B$ ,  $C$  de la forme  $r \wedge C'$  obtenu par induction sur  $C$ ,  $p$  une variable fraîche  
alors  $A' = p \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge B' \wedge C'$
- Si  $A = B \wedge C$ ,  $B$  de la forme  $q \wedge B'$  obtenu par induction sur  $B$ ,  $C$  de la forme  $r \wedge C'$  obtenu par induction sur  $C$ ,  $p$  une variable fraîche  
alors  $A' = p \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge B' \wedge C'$
- Si  $A = B \Rightarrow C$ ,  $B$  de la forme  $q \wedge B'$  obtenu par induction sur  $B$ ,  $C$  de la forme  $r \wedge C'$  obtenu par induction sur  $C$ ,  $p$  une variable fraîche  
alors  $A' = p \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge B' \wedge C'$

- Exemples

- $a \Rightarrow b \quad \rightsquigarrow d \wedge (\neg d \vee \neg a \vee b) \wedge (d \vee a) \wedge (d \vee \neg b)$
- $a \wedge \neg a \quad \rightsquigarrow d \wedge (d \vee \neg a \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee a) \wedge (\neg d \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg a) \wedge (c \vee a)$

**ATTENTION** Avec cette construction,  $A$  valide n'implique pas  $A'$  valide  
En revanche, si  $A$  contradictoire alors  $A'$  contradictoire

# Résolution en logique propositionnelle

- Rappel

- $E \models A$  ssi  $E \cup \{\neg A\}$  contradictoire
- En particulier  $A$  valide ssi  $\neg A$  contradictoire

- Système de preuve par résolution

Soient  $C$  et  $C'$  deux clauses,  $L$  un littéral,  $p$  une variable propositionnelle

Règles d'inférence

$$\frac{C \vee p \quad C' \vee \neg p}{C \vee C'} \text{ (résolution)}$$

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L} \text{ (factorisation)}$$

Factorisation aussi appelée contraction

- Proposition 6

Les règles de résolution et factorisation sont correctes

# Résolution en logique propositionnelle

## Déduction

- Déduction par résolution

Soient  $E$  un ensemble de clauses (les hypothèses) et  $C$  une clause (le but)

Une **déduction par résolution** de  $C$  à partir de  $E$  est une suite  $C_1, \dots, C_n$  tq

- $C_n = C$

- Pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$

- Soit  $C_i \in E$

- Soit  $C_i$  obtenue à partir de  $C_j$  ( $j \leq i$ ) en appliquant la règle de factorisation

- Soit  $C_i$  obtenue à partir de  $C_j$  et  $C_{j'}$  ( $j \leq i, j' \leq i$ ) en appliquant la règle de résolution

- Proposition 7

Soient  $E$  un ensemble de clauses (les hypothèses) et  $C$  une clause (le but)

S'il existe une **déduction par résolution** de  $C$  à partir de  $E$ , alors  $E \models C$

- Preuve

# Résolution en logique propositionnelle

## Réfutation

- Réfutation

Soit  $E$  un ensemble de clauses

Une **réfutation** de  $E$  est une déduction par résolution de  $\emptyset$  à partir de  $E$

- Théorème

Soit  $E$  un ensemble de clauses

$E$  est contradictoire ssi il existe une **réfutation** de  $E$

- Exemples

$$F_1: p \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$\neg F_1 \sim \{p, \neg p \vee q, \neg q\}$$

$$\frac{\frac{p}{q} \quad \neg p \vee q}{\neg q}}{\emptyset}$$

$$F_2: ((a \vee b) \Rightarrow (a \vee c)) \Rightarrow (a \vee (b \Rightarrow c))$$

$$\neg F_2 \sim \{\neg b \vee a \vee c, \neg a, b, \neg c\}$$

$$\frac{\frac{\neg b \vee a \vee c \quad \neg a}{\neg b \vee c} \quad b}{\frac{c \quad \neg c}}{\emptyset}}$$

# Résolution en logique propositionnelle

## Réfutation

- Azolan, Danceny et Valmont sont chevaliers ou valets
- Les **valets mentent**, les **chevaliers disent la vérité**  
(affirmation Azolan) Azolan dit : *Danceny est un valet*  
(affirmation Danceny) Danceny dit : *Azolan et Valmont sont du même type*
- Montrons que *Valmont est un valet*

- Modélisation

$a$  : Azolan est un chevalier

$d$  : Danceny est un chevalier

$v$  : Valmont est un chevalier

$affA$  :  $\neg d$

$affD$  :  $(a \wedge v) \vee (\neg a \wedge \neg v)$

Hypothèse 1 :  $(a \wedge affA) \vee (\neg a \wedge \neg affA)$

Hypothèse 2 :  $(d \wedge affD) \vee (\neg d \wedge \neg affD)$

À montrer :  $\neg v$

Donc réfuter :  $v$

Clauses :  $\{a \vee d, \neg a \vee \neg d, d \vee \neg a \vee \neg v, a \vee d \vee v, a \vee \neg v \vee \neg d, v \vee \neg a \vee \neg d, v\}$  40