

LC – Logique classique

Sylvain Brandel

2025 – 2026

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

Partie 3

LOGIQUE DU PREMIER ORDRE

Vocabulaire

- Symboles d'un **langage** (vocabulaire) du premier ordre :
 - $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \{f, g, h, \dots\}$: symboles de fonctions avec fonction d'arité :
$$ar : \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$
 - $\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \{a, b, c, \dots\}$: symboles de constantes (fonctions d'arité 0)
 - $\mathcal{S}_{\mathcal{R}} = \{P, Q, R, \dots\}$: symboles de relations (prédicats) avec fonction d'arité
$$ar : \mathcal{S}_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{N}$$
- Remarques
 - \perp est un symbole de relation 0-aire
 - $=$ est un symbole de relation binaire

Termes

- On ajoute un ensemble infini de variables :
 - $\mathcal{V} = \{x, y, z \dots\}$: ensembles de variables
- Ensemble \mathcal{T} des **termes** sur un langage \mathcal{L} :
 - Les variables et les constantes sont des termes
 - Si t_1, \dots, t_n sont des termes et f un symbole de fonction tq $ar(f) = n$,
alors $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme
- Un **terme clos** est un terme qui ne contient pas de variables
- \mathcal{T} est le plus petit ensemble contenant les variables, les constantes, et stable par l'*application* des symboles de fonctions de \mathcal{L} à des termes

Substitutions

- **Substitution** : fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$, domaine noté $dom(\sigma)$
- On note $[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]$ la substitution de domaine $\{x_1, \dots, x_n\}$ qui associe t_i à x_i pour $1 \leq i \leq n$
- **Application** d'une substitution σ sur un **terme** t , notée $t\sigma$:
 - Si $t = a$ (a : constante), $t\sigma = a$
 - Si $t = x$, $x \in dom(\sigma)$, $t\sigma = \sigma(x)$
 - Si $t = y$, $y \notin dom(\sigma)$, $t\sigma = y$
 - Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $t\sigma = f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
- Le terme u **filtre** le terme v s'il existe σ tq $u\sigma = v$
- Les termes u et v sont **unifiables** s'il existe σ tq $u\sigma = v\sigma$

Formules

- On ajoute les connecteurs et quantificateurs :
 - Connecteurs du calcul propositionnel : \neg , \vee , \wedge , \Rightarrow
 - Quantificateur universel : \forall
 - Quantificateur existentiel : \exists
- Ensemble \mathcal{F} des **formules** :
 - Si t_1, \dots, t_n sont des termes et R un symbole de relation tq $ar(R) = n$,
alors $R(t_1, \dots, t_n)$ est une formule (**atomique**)
 - Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule
 - Si A et B sont des formules, alors $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ sont des formules
 - Si A est une formule et x une variable, alors $\forall x A$ et $\exists x A$ sont des formules

\forall et \exists : priorité minimale

- **Formule atomique** :
 - Soit \perp
 - Soit $R(t_1, \dots, t_n)$ avec t_1, \dots, t_n : termes, R : symbole de relation n -aire

Formules

- Ensemble des **sous-formules** d'une formule A , noté $SF(A)$:
 - Si A est atomique, $SF(A) = \{A\}$
 - Si $A = \neg B$ ou $\forall x B$ ou $\exists x B$, $SF(A) = \{A\} \cup SF(B)$
 - Si $A = B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \Rightarrow C$, $SF(A) = \{A\} \cup SF(B) \cup SF(C)$
- **Langage d'une formule** A , noté $\mathcal{L}(A)$: l'ensemble (fini) des symboles de A
- **Taille** d'une formule A , notée $\tau(A)$:
nombre de connecteurs et de quantificateurs apparaissant dans A :
 - Si A est atomique, $\tau(A) = 0$
 - Si $A = \neg B$ ou $\forall x B$ ou $\exists x B$, $\tau(A) = 1 + \tau(B)$
 - Si $A = B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \Rightarrow C$, $\tau(A) = 1 + \tau(B) + \tau(C)$

Variables libres et liées

- Ensemble des **variables** d'un terme t , noté $V(t)$:
 - Si t est une variable x , $V(t) = \{x\}$
 - Si t est une constante, $V(t) = \emptyset$
 - Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
- Ensemble des **variables libres** d'une formule A , noté $FV(A)$:
 - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$ (R : symbole de relation), $FV(A) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
 - Si $A = \neg B$, $FV(A) = FV(B)$
 - Si $A = B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \Rightarrow C$, $FV(A) = FV(B) \cup FV(C)$
 - Si $A = \forall x B$ ou $\exists x B$, $FV(A) = FV(B) \setminus \{x\}$
- Ensemble des **variables liées** (muettes) d'une formule A , noté $BV(A)$:
 - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$ (R : symbole de relation), $BV(A) = \emptyset$
 - Si $A = \neg B$, $BV(A) = BV(B)$
 - Si $A = B \wedge C$ ou $B \vee C$ ou $B \Rightarrow C$, $BV(A) = BV(B) \cup BV(C)$
 - Si $A = \forall x B$ ou $\exists x B$, $BV(A) = BV(B) \cup \{x\}$

Variables libres et liées

- Deux formules sont α -équivalentes si elles sont syntaxiquement identiques à un renommage près des occurrences des variables liées
- Si pour une formule A , $FV(A) = \emptyset$, A est dite close
- Si pour une formule A , $FV(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$,
la fermeture (universelle) de A est la formule close $\forall x_1 \dots \forall x_n A$

Substitutions

- Application d'une substitution σ sur une formule A , notée $A\sigma$:
 - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$, $A\sigma = R(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma)$
 - Si $A = \neg B$, $A\sigma = B\sigma$
 - Si $A = B \theta C$ avec $\theta \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$, $A\sigma = B\sigma \theta C\sigma$
 - Si $A = Qx B$ avec $Q \in \{\forall, \exists\}$, si $x \notin \bigcup_{y \in \text{dom}(\sigma \setminus \{x\})} V(\sigma(y))$, $A\sigma = Qx B\sigma$

(on remplace les variables non « protégées » par des quantificateurs)

Formules

- Si on se restreint aux symboles de relation d'arité 0
 - Une formule ne contient pas de variables
 - Une formule ne contient pas de termes
 - Une formule ne contient pas de quantificateurs

On obtient ... les formules du **calcul propositionnel** !

- Rappel, \perp est un symbole de relation 0-aire
- Une « **variable** » **propositionnelle** est une **relation** 0-aire (une formule)

Sémantique

- **Structure d'interprétation** pour un langage $\mathcal{L} : \mathcal{SI} = (D, I)$
 - D : domaine, ensemble non vide
 - I : fonction d'interprétation
 - Pour chaque constante $c \in \mathcal{S}_c$, $I(c) \in D$
 - Pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{S}_f$, $ar(f) = n$, $I(f) : D^n \rightarrow D$
 - Pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{S}_r$, $ar(R) = n$, $I(R) : D^n \rightarrow \mathbb{B}$
- **Affectation de valeurs** aux variables :
 - Fonction $v : \mathcal{V} \rightarrow D$
 - $v[x := d]$ pour $d \in D$ est la fonction v' :
 - $v'(x) = d$
 - $v'(y) = v(y)$ pour $y \neq x$

Sémantique

- Valeur d'un terme t , notée $I_v(t)$:
 - Si $t = a$ (a : constante), $I_v(t) = I(a)$
 - Si $t = x$ (x : variable), $I_v(t) = v(x)$
 - Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, $I_v(t) = I(f)(I_v(t_1), \dots, I_v(t_n))$
- Valeur de vérité d'une formule A , notée $I_v(A)$:
 - Si $A = \perp$, $I_v(A) = 0$
 - Si $A = R(t_1, \dots, t_n)$, $I_v(A) = I(R)(I_v(t_1), \dots, I_v(t_n))$
 - Si $A = \neg B$, $I_v(A) = \overline{I_v(B)}$
 - Si $A = B \wedge C$, $I_v(A) = I_v(B) \cdot I_v(C)$
 - Si $A = B \vee C$, $I_v(A) = I_v(B) + I_v(C)$
 - Si $A = B \Rightarrow C$, $I_v(A) = I_v(B) \dot{\Rightarrow} I_v(C)$
 - Si $A = \forall x B$, $I_v(A) = 1$ si pour tout $d \in D$ on a $I_{v[x:=d]}(B) = 1$, 0 sinon
 - Si $A = \exists x B$, $I_v(A) = 1$ s'il existe un $d \in D$ tel que $I_{v[x:=d]}(B) = 1$, 0 sinon

Sémantique

A et B : formules, E : **ensemble** de formules, I : interprétation

- $I_v(A)$ ne dépend pas des variables liées
- Si $BV(A) = \emptyset$, alors $I_v(A) = I_{v'}(A)$ pour toutes valuations v et v'
- Si $I_v(A) = 1$, alors I_v **satisfait** A , noté $I_v \models A$
- Si $I_v \models A$ pour tout $A \in E$, alors I_v **satisfait** E , noté $I_v \models E$
- S'il n'existe aucune I_v telle que $I_v \models E$, alors E contradictoire
- Si $I_v \models A$ pour tout I et tout v , alors A **valide** noté $\models A$
- Si $I_v \models A$ pour tout I et tout v telles que $I_v \models E$,
alors E déduit sémantiquement A noté $E \models A$
- Si $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$, alors A et B sont **sémantiquement équivalentes** noté $A \equiv B$

Quelques résultats

- Proposition

A et B formules, E ensemble de formules

– $E \models A \Rightarrow B$ ssi $E \cup \{A\} \models B$

– $E \models A$ ssi $E \cup \{\neg A\}$ contradictoire

Quelques équivalences remarquables

- Celles du calcul propositionnel
- $\forall x \neg A \equiv \neg \exists x A$ $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$
- $\exists x \neg A \equiv \neg \forall x A$ $\exists x A \equiv \neg \forall x \neg A$
- Si $y \notin FV(A)$ alors
 - $\forall x A \equiv \forall y A[x := y]$
 - $\exists x A \equiv \exists y A[x := y]$
- Si $x \notin FV(B)$ alors
 - $(\forall x A) \wedge B \equiv \forall x (A \wedge B)$
 - $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$
 - $(\exists x A) \wedge B \equiv \exists x (A \wedge B)$
 - $(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$

Quelques équivalences remarquables

- $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
- $\exists y \forall x A \not\equiv \forall x \exists y A$
- ATTENTION, on n'a pas $\forall x \exists y A \equiv \exists y \forall x A$

Déduction naturelle

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} (ax)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} (\Rightarrow_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} (\vee_i^d)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} (\wedge_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A} (aff)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\Rightarrow_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} (\vee_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} (\wedge_e^d)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} (\neg_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_e)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\perp_c)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x A} (\forall_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} (\exists_i)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma, \text{ ni dans } C}{\Gamma \vdash C} (\exists_e)$$

Déduction naturelle

- Proposition
Les règles de déduction naturelle sont correctes
- Théorème

F : formule sans variable libre

$\vdash F$ prouvable par déduction naturelle ssi $\models F$

- Exemples
 - Tout homme est mortel ; Socrate est un homme donc Socrate est mortel
 - Symboles de constantes : S
 - Symboles de relation : $H : 1$, $M : 1$
 - $\vdash (\forall x A \vee \forall x B) \Rightarrow \forall x (A \vee B)$
 - $\vdash \neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
 - $\vdash \forall x A \vee \exists x \neg A$

Déduction naturelle

Ajout de nouvelles règles

Exemple :

Les règles de la déduction naturelle de la logique propositionnelle

+

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad x \text{ n'est pas libre dans } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall x A} (\forall_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]} (\forall_e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A} (\exists_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C \quad x \text{ libre ni dans } \Gamma, \text{ ni dans } C}{\Gamma \vdash C} (\exists_e)$$

+

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} (=_i) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} (=_e)$$

- Pas de perte de cohérence

F sans variable libre, $\vdash F$ séquent prouvable ssi $\models F$

Déduction naturelle

Ajout de nouvelles règles

Exemple :

Les règles de la déduction naturelle

+

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} (=i) \quad \text{reflexivity}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t] \quad \Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash A[x := u]} (=e)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t} (=sym) \quad \text{symmetry}$$

$$\frac{\Gamma \vdash s = u \quad \Gamma \vdash u = t}{\Gamma \vdash s = t} (=trans) \quad \text{transitivity}$$

- Pas de perte de cohérence
 F sans variable libre, $\vdash F$ séquent prouvable ssi $\vDash F$
- Exemple
 - L'égalité est symétrique et transitive

Déduction naturelle

Ajout de nouvelles règles

Propriété sur entiers :

- Ensemble N défini **inductivement**

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow Z \\ n \rightarrow S(n) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{c-à-d } Z \in N \\ \text{c-à-d } S(n) \in N \text{ si } n \in N \end{array}$$

- Prouver P sur N par **induction**

– Stabilité de $F \subseteq N$ tel que si $n \in F$ alors $P(n)$

– On montre

- $P(Z)$ c-à-d $Z \in F$
- Si $P(n)$ alors $P(S(n))$ c-à-d $S(n) \in F$ si $n \in F$

$$\frac{P(Z) \quad \forall m P(m) \rightarrow P(S(m))}{\forall n P(n)} (N_{ind})$$

Déduction naturelle

Ajout de nouvelles règles

Propriété sur les listes d'entiers :

- Ensemble L défini **inductivement**

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow [] \\ l \rightarrow n :: l, n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\text{c-à-d } [] \in L$$

$$\text{c-à-d } e :: l \in L \text{ si } l \in L \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

- Prouver P sur L par **induction**

– Stabilité de $F \subseteq L$ tel que si $l \in F$ alors $P(l)$

– On montre

- $P([])$

$$\text{c-à-d } [] \in F$$

- Si $P(l)$ alors pour tout n , $P(n :: l)$

$$\text{c-à-d } e :: l \in F \text{ si } l \in F \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\frac{P([]) \quad \forall n \forall l' P(l') \rightarrow P(n :: l')}{\forall l P(l)} (L_{ind})}$$

Forme clausale

- **Littéral** : Formule atomique ou négation d'une formule atomique
- **Clause** : $\forall x_1 \dots \forall x_n (l_1 \vee \dots \vee l_q)$ $n \geq 0$, chaque l_i : littéral
- La clause $\forall x_1 \dots \forall x_n (l_1 \vee \dots \vee l_q)$ **est notée** $l_1 \vee \dots \vee l_q$ (pas d'ambiguïté)
- **Forme Normale Conjonctive (FNC)**
Conjonction de clauses $D_1 \wedge \dots \wedge D_k$, $k > 0$, chaque D_i : clause
 $\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n l_i^j$, chaque l_i^j : littéral
- A : formule quelconque $\approx A'$: FNC tq A et A' **équisatisfiables**
(laborieux)

Forme clausale

- Forme **prénexe** d'une formule A :

Formule de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_n M$ où $n \geq 0$

chaque Q_i : quantificateur

M : sans quantificateur

M : **matrice** de A

$Q_1x_1 \dots Q_nx_n$: **préfixe** de A

- Proposition

Pour toute formule $A \in \mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ tq

– A' est en forme prénexe

– $A \equiv A'$

- Preuve

Equivalences remarquables pour « faire sortir » les quantificateurs

Forme clausale

- Forme **rectifiée** d'une formule A :
 - $FV(A) \cap BV(A) = \emptyset$
 - Deux quantificateurs distincts de A lient deux variables différentes
- Proposition
 - Pour toute formule $A \in \mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ tq
 - A' est en forme rectifiée
 - $A \equiv A'$
- Preuve
 - Renommage des variables muettes

Forme clausale

Skolémisation

- Suppression d'un existentiel dans une formule A :

A de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_i \exists x_{i+1} Q_{i+2} x_{i+2} \dots Q_n x_n M$ $i \geq 0, n \geq 1$

chaque Q_i : quantificateur

M : sans quantificateur

A' de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_i Q_{i+2} x_{i+2} \dots Q_n x_n M'$ où

– $M' = M[x_{i+1} := f(x_1, \dots, x_i)]$

– f : symbole de fonction i -aire *frais* (fonction de Skolem)

- Proposition

Pour toute formule $A \in \mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ tq

– A' est obtenue à partir de A en supprimant un existentiel

– A et A' sont **équisatisfiables** (**pas équivalentes**)

- Exemples

– $\forall x \exists y R(x, y) \rightsquigarrow \forall x R(x, f(x))$ f : fournit un y qui va bien pour chaque x

– $\exists y \forall x R(x, y) \rightsquigarrow \forall x R(x, c)$ c : symbole de constante (fonction 0-aire)

Forme clausale

Skolémisation

- **Forme de Skolem** d'une formule A

Formule A' tq

- A' ne contient pas d'existentiels
- Si A comporte n existentiels, A' comporte n nouveaux symboles de fonctions

- Proposition

Pour toute formule $A \in \mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ tq

- A' est en forme de Skolem
- A et A' sont équisatisfiables (**pas équivalentes**)

- Preuve

On supprime les existentiels un par un

- Exemple

- $\exists x_1 \forall y_1 \forall y_2 \exists x_2 \{ R(x_1, f(y_1)) \wedge R(f(y_2), x_1) \Rightarrow R(x_1, x_2) \}$
 $\sim \forall y_1 \forall y_2 \{ R(c, f(y_1)) \wedge R(f(y_2), c) \Rightarrow R(c, g(y_1, y_2)) \}$

Forme clausale

- Proposition

Pour toute formule $A \in \mathcal{F}$, il existe $A' \in \mathcal{F}$ tq

- A' est en FNC
- A et A' sont équisatisfiables

- Preuve

- 1) À partir de A , déterminer $A^{(1)}$ en forme rectifiée équivalente
- 2) À partir de $A^{(1)}$, déterminer $A^{(2)}$ en forme prénexe équivalente
- 3) Skolémiser $A^{(2)}$ pour obtenir $A^{(3)}$, $A^{(2)}$ et $A^{(3)}$ sont équisatisfiables
- 4) Supprimer tous les universels de $A^{(3)}$ pour obtenir $A^{(4)}$ équivalente à $A^{(3)}$
- 5) Mettre $A^{(4)}$ en FNC (pareil propositionnel) pour obtenir A' équivalente à $A^{(4)}$

$\Rightarrow A$ et A' sont équisatisfiables


Unification

- Rappels substitution
 - **substitution** : fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$, domaine noté $dom(\sigma)$
 - On note $[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]$ la substitution de domaine $\{x_1, \dots, x_n\}$ qui associe t_i à x_i pour $1 \leq i \leq n$ (les x_i distincts deux à deux)
 - L'**application** d'une substitution σ sur un **terme** t est notée $t\sigma$
 - Le terme u **filtre** le terme v s'il existe σ tq $u\sigma = v$
 - Les termes u et v sont **unifiables** s'il existe σ tq $u\sigma = v\sigma$
- **Composition** de $\sigma = [x_1 := s_1, \dots, x_n := s_n]$ et $\theta = [y_1 := t_1, \dots, y_m := t_m]$: substitution $[x_1 := s_1\theta, \dots, x_n := s_n\theta, y_1 := t_1, \dots, y_m := t_m]$ notée $\sigma\theta$ en ayant supprimé
 - Les éléments de la forme $x := x$
 - Les éléments $y_j := t_j$ tq $y_j \in dom(\theta)$

Unification

- Problème d'unification $P : s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n$ ou \top ou \perp
- σ solution de P (unificateur de P) si pour $1 \leq i \leq n$, $s_i \sigma \equiv t_i \sigma$
Toute substitution solution de \top , aucune substitution solution de \perp
- Ensemble des solutions de $P : \mathcal{U}(P)$
- Exemple : $f(x, a) = f(f(b, y), y) \wedge y = a$
- P est unifiable si $\mathcal{U}(P) \neq \emptyset$
- Deux termes s et t sont unifiables
si le problème d'unification $s = t$ a une solution
- Deux formules atomiques $R(s_1, \dots, s_n)$ et $R(t_1, \dots, t_n)$ sont unifiables
si le problème d'unification $s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n$ a une solution

Unification

- σ **solution principale** de P (**unificateur le plus général** de P) si pour tout unificateur σ' de P il existe une substitution γ tq $\sigma' = \sigma\gamma$
- Proposition
 P problème d'unification
Si $\mathcal{U}(P) \neq \emptyset$, il existe une solution principale **unique** σ notée **$mgu(P)$**
 *(most general unifier)*
(À renommage près)
- P_1 et P_2 **équivalents** si $\mathcal{U}(P_1) = \mathcal{U}(P_2)$
- **Forme résolue** de $P : x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_n = t_n$ x_i : **distincts** deux à deux
hors des t_j
- Si P équivalent à forme résolue $x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_n = t_n$
alors $mgu(P) = [x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]$
- Exemple : $f(x, a) = f(f(b, y), y) \wedge y = a$ équivalent à $x = f(b, a) \wedge y = a$
 $mgu(P) = [x := f(b, a), y := a]$

Unification

Règles de transformation en forme résolue

Trivial	$\frac{s = s}{\top}$	
Décomposition	$\frac{f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n)}{s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n}$	
Incompatibilité (<i>clash</i>)	$\frac{f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_n)}{\perp}$	<i>si</i> $f \neq g$
Union de deux variables	$\frac{x = y \wedge P'}{x = y \wedge P'[x := y]}$	<i>si</i> $x, y \in V(P')$
Remplacement de variables	$\frac{x = s \wedge P'}{x = s \wedge P'[x := s]}$	<i>si</i> $x \in V(P') \setminus V(s)$ et $s \notin \mathcal{V}$
Fusion	$\frac{x = s \wedge x = t}{x = s \wedge s = t}$	<i>si</i> $x \in \mathcal{V}$ et $s, t \notin \mathcal{V}$ et $ s \leq t $
Test d'occurrence (<i>occur – check</i>)	$\frac{x_1 = t_1[x_2]_{p_1} \wedge \dots \wedge x_n = t_n[x_1]_{p_n}}{\perp}$	<i>si</i> $p_1 \cdot \dots \cdot p_n \neq \Lambda$

Unification

- U : ensemble de règles de transformation en forme résolue \rightarrow algo
- Proposition
La transformation est **correcte** :
Si $P_0 \rightarrow_U P_1$ alors P_0 et P_1 équivalents
- Proposition
La transformation est **complète** :
Si aucune règle de U applicable à P_i , alors P_i en forme résolue
- Proposition
La transformation est **bien fondée** :
Pas de chaîne $P_0 \rightarrow_U P_1 \rightarrow_U P_2 \dots$ infinie

Unification

- Exemples

- Symboles de constantes : a et b
- Symboles de fonctions : $f : 2$
- $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$

- $P : f(a, b) = f(a, a)$

$$\mathcal{U}(P) = \emptyset \quad (\textit{clash})$$

- $P : f(x, y) = f(z, z)$

$$\mathcal{U}(P) = [x := z, y := z]$$

- $P : f(x, f(a, y)) = f(f(b, z), x)$

$$\mathcal{U}(P) = \emptyset \quad (\textit{clash})$$

- $P : f(f(a, y), f(y, z)) = f(x, x)$

$$\mathcal{U}(P) = [x := f(a, a), y := a, z := a]$$

- $P : f(x, f(x, z)) = f(f(y, z), y)$

$$\mathcal{U}(P) = \emptyset \quad (\textit{occur - check})$$

Résolution en logique du premier ordre

- Soient $L = R(s_1, \dots, s_n)$ et $L' = R(t_1, \dots, t_n)$ deux littéraux positifs ou nég.
On note $mgu(L, L')$ le *mgu* du problème d'unification

$$s_1 = t_1 \wedge \dots \wedge s_n = t_n$$

- Système de **preuve par résolution**
Soient C et C' deux clauses, L et L' deux littéraux
Règles d'inférence

$\frac{C \vee L \quad C' \vee \neg L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee C'\sigma} \text{ (rés.)}$	$\frac{C \vee L \vee L' \quad \sigma = mgu(L, L')}{C\sigma \vee L\sigma} \text{ (fact.)}$
---	---

- Exemple : Clauses $Q(x) \vee R(a, f(x))$ et $S(y, x) \vee \neg R(y, f(b))$

$$\frac{Q(x) \vee R(a, f(x)) \quad S(y, x) \vee \neg R(y, f(b))}{Q(b) \vee S(a, b)} \text{ (rés. } \sigma = [x := b, y := a])$$

Résolution en logique du premier ordre

- Dédution, réfutation : pareil propositionnel
- Théorème (pareil propositionnel)

Soit E un ensemble de clauses

E est contradictoire ssi il existe une réfutation de E

- Exemple $E = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$

$$\begin{array}{l}
 - C_1 : \neg R(z, z) \vee R(z, a) \\
 - C_2 : R(u, f(y)) \vee R(u, y) \\
 - C_3 : \neg R(x, a) \vee R(x, x) \\
 - C_4 : \neg R(v, f(y)) \vee \neg R(v, y)
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} mgu(R(z, z), R(u, f(y))) = [u := f(y), z := f(y)] \\ \\ mgu(R(x, x), R(v, f(y))) = [v := f(y), x := f(y)] \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{C_1 \quad C_2}{R(f(y), a) \vee R(f(y), y)} \text{rés}}{R(f(a), f(a))} \text{fact } [y := a] \\
 \frac{\frac{C_3 \quad C_4}{\neg R(f(y), a) \vee \neg R(f(y), y)} \text{rés}}{\neg R(f(a), f(a))} \text{fact } [y:=a] \\
 \hline
 \emptyset \qquad \qquad \qquad \text{rés}
 \end{array}$$

Résolution en logique du premier ordre

- Application : **calculer** (syntaxiquement) la **fonction** $f(x_1, \dots, x_n)$
- On détermine la **relation** $R_f(x_1, \dots, x_n, y)$ tq
$$R_f(x_1, \dots, x_n, y) \text{ vraie ssi } y = f(x_1, \dots, x_n) \quad R_f \sim \text{ens. de clauses } \mathcal{C}$$
- Calcul de $f(t_1, \dots, t_n)$, avec t_1, \dots, t_n : termes **clos**
 - On applique la résolution à $\mathcal{C}, \neg R_f(t_1, \dots, t_n, y)$
 - On obtient $R_f(t_1, \dots, t_n, u)$ et donc $u = f(t_1, \dots, t_n)$
- Exemple
 - Symboles de constantes : Z
 - Symboles de fonctions : $S : 1$
 - Symboles de **relation** : $Plus : 3$ et $Mult : 3$
 - Addition : $\mathcal{C} = \{Plus(Z, x_2, x_2), \neg Plus(x_1, x_2, y) \vee Plus(S(x_1), x_2, S(y))\}$
 - Dériver $\mathcal{C}, \neg Plus(Z, S(Z), y)$ on obtient $Plus(Z, S(Z), S(Z))$
 - Dériver $\mathcal{C}, \neg plus(S(Z), S(Z), y)$ on obtient $Plus(S(Z), S(Z), S(S(Z)))$